Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5373

Dans tout cet exercice, on considère la fonction f donnée par $f : x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-2;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-2;+\infty[$.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. de f au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que : $\forall x \in]-2;+\infty[\,,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}x.$
   Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
6. Dans un repère orthogonal du plan dont on choisira judicieusement l'unité graphique, construire $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{T}_0$ et ses éventuelles asymptotes.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5373

1. Il suffit de générer le logarithme présent dans l'expression de f.
2. Les deux limites ne posent pas problème et s'obtiennent par composition.
3. On pourra obtenir les variations de f à partir du signe de la dérivée ou par tout autre moyen reposant sur la composition de fonctions croissantes.
4. On met en place la forme de la tangente en un point.
5. On pourra penser à étudier les variations d'une fonctions judicieusement choisie et dont on étudiera le signe.
6. On met en place tous ces résultats.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 5374

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les valeurs des réels a_0, b_0, a_1 et b_1 tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a_0x+b_0)\,\mathrm{e}^{2x} \text{ et } f'(x) = (a_1x+b_1)\,\mathrm{e}^{2x}$$
3. Démontrer par récurrence sur l'entier n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx+b_n)\,\mathrm{e}^{2x}$$
   On précisera en particulier les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
4. Déterminer le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie à la question précédente.
5. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$.
   Établir une relation de récurrence sur portant sur les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis détermoiner l'expression du terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans les questions précédentes.
6. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5374

1. Par opérations usuelles. . .que l'on essaiera de détailler au mieux ici ?
2. C'est immédiat. . .
3. L'initialisation a été faite à la question précédente, et on se souviendra que $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
4. Il est fort possible que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de référence comme par exemple une géométrique, arithmético-géométrique, . . .
5. La remarque vaut là aussi.
6. Il suffit de mettre en forme les résultats précédents.