Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5373

Dans tout cet exercice, on considère la fonction f donnée par $f : x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-2;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-2;+\infty[$.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. de f au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que : $\quad \forall x \in\,]-2;+\infty[\,,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.
   Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
6. Dans un repère orthogonal du plan dont on choisira judicieusement l'unité graphique, construire $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{T}_0$ et ses éventuelles asymptotes.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5373

1. L'expression $f(x)$ n'a de sens que si $1+\dfrac{x}{2} > 0$, ce qui est le cas si $x \in\,]-2;+\infty[$. Par suite, f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-2;+\infty[$.
2. **Limite en -2 :** il est immédiat que $1+\dfrac{x}{2} \underset{x\to-2}{\longrightarrow} 0$ et donc par composition que $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to-2}{\longrightarrow} -\infty$ et donc que $f(x) \underset{x\to-2}{\longrightarrow} -\infty$.

   Limite en $+\infty$: il est immédiat que $1+\dfrac{x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc par composition que $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que $f(x) \underset{x\to-2}{\longrightarrow} +\infty$.
3. La fonction $x \longmapsto 1+\dfrac{x}{2}$ est continue et dérivable sur $]-2;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ est continue et dérivable sur $]-2;+\infty[$.

   Par suite il vient que : $\quad \forall x \in\,]-2;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{1}{2+x}$

   Le signe de $f'(x)$ est donc donné par celui de la fonction affine $x \longmapsto 2+x$ qui est croissante et s'annule en -2. On en déduit alors le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $]-2;+\infty[$:

x	-2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$
Variations de f	||	$-\infty \nearrow +\infty$

4. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x=0$ est donnée par : $\quad \mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$
   ce qui amène donc à : $\quad \mathcal{T}_0 : y = \dfrac{1}{2}x$.
5. Il s'agit donc d'étudier le signe sur $]-2;+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - \dfrac{1}{2}x$.
   Par des arguments similaires à ce qui précède, la fonction g est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

Un calcul direct donne : $\forall x \in \left]-2;+\infty\right[,\ g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-(x+2)}{2(x+2)} = -\dfrac{x}{x+2}$

dont le signe sur $\left]-2;+\infty\right[$ est clairement donné par celui de $-x$. On en déduit alors les variations de g sur $\left]-2;+\infty\right[$:

x	-2		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, la fonction g présente en 0 un maximum qui vaut 0, ce qui assure que : $\forall x \in \left]-2;+\infty\right[,\ g(x) \leq 0$

et donc que : $\forall x \in \left]-2;+\infty\right[,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.

On en déduit donc que $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessous de sa tangente $\mathcal{T}_0$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5374

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie par : $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{2x} \end{array}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les valeurs des réels a_0, b_0, a_1 et b_1 tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a_0 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x} \text{ et } f'(x) = (a_1 x + b_1)\,\mathrm{e}^{2x}$$
3. Démontrer par récurrence sur l'entier n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{2x}$$
On précisera en particulier les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
4. Déterminer le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie à la question précédente.
5. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$.
Établir une relation de récurrence sur portant sur les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis détermoiner l'expression du terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans les questions précédentes.
6. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5374

1. La fonction $x \longmapsto 2x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par produit la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Il est clair qu'en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a_0 x + b_0)\,\mathrm{e}^{2x}$.
La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et un calcul direct donne que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x} = (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$$
et donc en posant $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (a_1 x + b_1)\,\mathrm{e}^{2x}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par :

« Il existe deux réels a_n et b_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{2x}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la question précédente.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et par construction, on a que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

Par hypothèse de récurrence, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{2x}$
et un calcul direct donne alors que : $\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n+1)}(x) &= a_n \times \mathrm{e}^{2x} + (a_n x + b_n) \times 2\mathrm{e}^{2x} \\ &= (2a_n x + a_n + 2b_n)\,\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$

et donc en posant $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$, on a bien qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1}x + b_{n+1})\,\mathrm{e}^{2x}$
ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

4. D'après la question précédente, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_{n+1} = 2a_n$
ce qui assure que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_0 = 1$ ce qui donne que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = 2^n$$

5. Par construction de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\, c_{n+1} &= \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{a_n + 2b_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a_n + 2b_n}{2^n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{2^n} + 2 \times \frac{b_n}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2c_n) \\ &= \frac{1}{2} + c_n\end{aligned}$

ce qui assure que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $c_0 = 0$.

On a donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\, c_n = \dfrac{n}{2}$

Finalement, il vient que : $\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\, b_n &= 2^n \times c_n \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$

6. De ce qui précède, on en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = \left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2x}$.