Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2096

On considère les quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 suivants :

$$z_1 = -3+3\mathrm{i}\,, \quad z_2 = 2\sqrt{3}+6\mathrm{i}\,, \quad z_3 = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_4 = 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. Pour chacun des complexes z_1, z_2, z_3 et z_4, déterminer le module et un argument.

2. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

3. On pose :

$$z_5 = z_1 \times z_2, \quad z_6 = \frac{z_4}{z_1}, \quad z_7 = \frac{z_2}{z_4} \qquad \text{et} \qquad z_8 = (z_3)^6$$

a. Pour chacun des complexes z_5, z_6, z_7 et z_8, déterminer le module et un argument.

b. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5371

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse aux propriétés des nombres complexes solutions des équations $(\star_3)$: $z^3=1$, $(\star_4)$: $z^4=1$ et plus généralement $(\star_n)$: $z^n=1$ où $n\in\mathbb{N}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y)+\mathrm{i}\,\sin(y)) = \cos(x+y)+\mathrm{i}\,\sin(x+y)$

2. On désigne par j le complexe défini par $\mathrm{j} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

a. Montrer que $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.

b. Que vaut $\mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}}$?

c. Vérifier que j et j^2 sont bien solutions de l'équation $(\star_3)$: $z^3=1$.
Donner les 3 complexes solutions de $(\star_3)$.

d. Montrer que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

3. a. A l'aide d'identités remarquables, déterminer quatre complexes a, b, c et d de sorte que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z^4-1 = (z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,(z-d)$$

b. Donner les quatre solutions complexes de $(\star_4)$ toutes exprimées sous forme d'une puissance de i.

c. On désigne par ω un des solutions de l'équation $(\star_4)$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\omega^k$?

4. a. Dans cette question ω désigne une solution quelconque de l'équation $(\star_n)$: $z^n=1$ où $n\in\mathbb{N}$.
Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$?

b. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n\in\mathbb{N}$ que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx)+\mathrm{i}\,\sin(nx)$$

c. Montrer que tout complexe ω de la forme $\omega = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n\in\mathbb{N}$.

d. Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$. Montrer que tout complexe ω_k de la forme $\omega_k = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n\in\mathbb{N}$.