Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2096

On considère les quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 suivants :

$$z_1 = -3 + 3\mathrm{i}\,, \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}\,, \quad z_3 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_4 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. Pour chacun des complexes z_1, z_2, z_3 et z_4, déterminer le module et un argument.

2. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

3. On pose :

$$z_5 = z_1 \times z_2, \quad z_6 = \frac{z_4}{z_1}, \quad z_7 = \frac{z_2}{z_4} \qquad \text{et} \qquad z_8 = (z_3)^6$$

a. Pour chacun des complexes z_5, z_6, z_7 et z_8, déterminer le module et un argument.

b. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2096

1. Exprimer $\cos(\theta_i)$ et $\sin(\theta_i)$ où θ_i est un argument de z_i, puis identifier θ_i

2. Exploiter les réponses de la question précédente pour obtenir la forme demandée.

3. Obtenir les modules et arguments demandés à l'aide des opérations sur les modules et arguments.

4. Exploiter les réponses de la question précédente pour obtenir la forme demandée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5371

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse aux propriétés des nombres complexes solutions des équations $(\star_3) : z^3 = 1$, $(\star_4) : z^4 = 1$ et plus généralement $(\star_n) : z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)) = \cos(x+y) + \mathrm{i}\,\sin(x+y)$

2. On désigne par j le complexe défini par $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

a. Montrer que $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.

b. Que vaut $\mathrm{j} \times \overline{\mathrm{j}}$?

c. Vérifier que j et j^2 sont bien solutions de l'équation $(\star_3) : z^3 = 1$.
Donner les 3 complexes solutions de $(\star_3)$.

d. Montrer que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

3. a. A l'aide d'identités remarquables, déterminer quatre complexes a, b, c et d de sorte que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^4 - 1 = (z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,(z-d)$$

b. Donner les quatre solutions complexes de $(\star_4)$ toutes exprimées sous forme d'une puissance de i.

c. On désigne par ω un des solutions de l'équation $(\star_4)$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \omega^k$?

4. **a.** Dans cette question ω désigne une solution quelconque de l'équation $(\star_n)$: $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$.
   Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$?

   b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\cos(x) + \mathrm{i}\ \sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\ \sin(nx)$$

   c. Montrer que tout complexe ω de la forme $\omega = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

   d. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que tout complexe ω_k de la forme $\omega_k = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\ \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5371

1. On développe, on réduit et on utilise ses formules de trigonométrie.
2. **a.** Un compare les deux complexes mis en jeu ici
   b. On effectue le produit...
   c. On élève les deux complèxes au cube, et on espère trouver...1.
   d. On effectue la somme demandée...
3. **a.** On développe, on réduit, on identifie et on résout un système
   b. On exploite la factorisation de la question précédente
   c. On effectue la somme demandée en ayant au préalable calculée les puissances de ω
4. **a.** On reconnaît une somme de référence...
   b. On met en place son raisonnement par récurrence et dans l'hérédité on mobilisera le résultat de la première question
   c. On pourra utiliser le résultat de la question précédente
   d. Même remarque.