Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2096

On considère les quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 suivants :

$$z_1 = -3+3\mathrm{i}\,, \quad z_2 = 2\sqrt{3}+6\mathrm{i}\,, \quad z_3 = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_4 = 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. Pour chacun des complexes z_1, z_2, z_3 et z_4, déterminer le module et un argument.

2. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

3. On pose :

$$z_5 = z_1 \times z_2, \quad z_6 = \frac{z_4}{z_1}, \quad z_7 = \frac{z_2}{z_4} \qquad \text{et} \qquad z_8 = (z_3)^6$$

a. Pour chacun des complexes z_5, z_6, z_7 et z_8, déterminer le module et un argument.

b. Écrire alors la forme trigonométrique de ces quatre complexes.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2096

1. Voir tableau ci-après où θ désigne un argument du complexe z.

2. Voir la dernière colonne du tableau ci-après.

z	$\lvert z\rvert$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	θ	$\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}$
$-3+3\mathrm{i}$	$3\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}2$	$\frac{3\pi}{4}$	$3\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$
$2\sqrt{3}+6\mathrm{i}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$4\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$
$2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$4e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$
$2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$	4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$4e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$

3. a.

- **Pour z_5 :** on a $|z_5| = |z_1| \times |z_2|$, soit $|z_5| = 12\sqrt{6}$.
  Par ailleurs, $\arg(z_5) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_5 est $\frac{13\pi}{12}$.
- **Pour z_6 :** on a $|z_6| = \frac{|z_4|}{|z_1|}$, soit $|z_6| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
  Par ailleurs, $\arg(z_6) = \arg(z_4) - \arg(z_1) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_6 est $-\frac{13\pi}{12}$.
- **Pour z_6 :** on a $|z_6| = \frac{|z_2|}{|z_4|}$, soit $|z_7| = \sqrt{3}$.
  Par ailleurs, $\arg(z_7) = \arg(z_2) - \arg(z_4) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_7 est $\frac{2\pi}{3}$.
- **Pour z_8 :** on a $|z_8| = |z_3|^6$, soit $|z_8| = 4096$.
  Par ailleurs, $\arg(z_8) = 6\arg(z_3) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit qu'un argument de z_8 est $-\frac{6\pi}{3} = -2\pi$.

b. On obtient alors : $z_5 = 12\sqrt{6}e^{\mathrm{i}\,\frac{13\pi}{12}}$, $z_6 = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-\mathrm{i}\,\frac{13\pi}{12}}$, $z_7 = \sqrt{3}e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}$ et $z_8 = 4096e^{\mathrm{i}\,2\pi} = 4096$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5371

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse aux propriétés des nombres complexes solutions des équations $(\star_3)$: $z^3 = 1$, $(\star_4)$: $z^4 = 1$ et plus généralement $(\star_n)$: $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)) = \cos(x+y) + \mathrm{i}\,\sin(x+y)$

2. On désigne par j le complexe défini par $\mathrm{j} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

- **a.** Montrer que $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.
- **b.** Que vaut $\mathrm{j} \times \overline{\mathrm{j}}$?
- **c.** Vérifier que j et j^2 sont bien solutions de l'équation $(\star_3)$: $z^3 = 1$.
  Donner les 3 complexes solutions de $(\star_3)$.
- **d.** Montrer que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

3. **a.** A l'aide d'identités remarquables, déterminer quatre complexes a, b, c et d de sorte que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^4 - 1 = (z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,(z-d)$$

- **b.** Donner les quatre solutions complexes de $(\star_4)$ toutes exprimées sous forme d'une puissance de i.
- **c.** On désigne par ω un des solutions de l'équation $(\star_4)$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \omega^k$?

4. **a.** Dans cette question ω désigne une solution quelconque de l'équation $(\star_n)$: $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$.
Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$?

- **b.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$$

- **c.** Montrer que tout complexe ω de la forme $\omega = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.
- **d.** Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que tout complexe ω_k de la forme $\omega_k = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5371

1. Un développement direct donne que pour tout$co, x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)) &= \cos(x)\cos(y) + \mathrm{i}\,\cos(x)\sin(y) + \mathrm{i}\,\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
&= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \mathrm{i}\,(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\
&= \cos(x+y) + \mathrm{i}\,\sin(x+y)
\end{aligned}$$

2. **a.** On a directement que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}^2 &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 \\
&= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 2\mathrm{i}\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

et aussi : $$\begin{aligned}\overline{\mathrm{j}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\times\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \mathrm{j}^2\end{aligned}$$

b. Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}} &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

c. Par définition, j et j^2 sont solutions de $(\star_3)$ si, et seulement si $\mathrm{j}^3 = 1$ et $\left(\mathrm{j}^2\right)^3 = 1$.

On a alors : $$\begin{aligned}\mathrm{j}^3 &= \mathrm{j}\times\mathrm{j}^2\\ &= \mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}}\\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

De même, on a : $$\begin{aligned}\left(\mathrm{j}^2\right)^3 &= \overline{\mathrm{j}}^3\\ &= \overline{\mathrm{j}^3}\\ &= \overline{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, j et j^2 sont bien solutions de $(\star_3)$, étant ensuite immédiat que 1 est solution évidente de $(\star_3)$.

d. On a directement que : $$\begin{aligned}1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 &= 1+\mathrm{j}+\overline{\mathrm{j}}\\ &= 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ &= 0\end{aligned}.$$

3. a. On a directement que : $$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\ z^4-1 &= \left(z^2\right)^2-(1)^2\\ &= \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)\\ &= \left(z^2-1^2\right)\left(z^2-\mathrm{i}^2\right)\\ &= (z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})\end{aligned}$$

d'où la factorisation demandée.

b. On a donc : $$\begin{aligned}\left(z^4=1\right) &\Leftrightarrow \left(z^4-1=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left((z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left((z-1=0)\text{ ou }(z+1=0)\text{ ou }(z-\mathrm{i}=0)\text{ ou }(z+\mathrm{i}=0)\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z\in\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z\in\left\{\mathrm{i}^0,\mathrm{i}^1,\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3\right\}\right)\end{aligned}$$

c. Si $\omega = 1$ **:** on a alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\omega^k = 4$.

Si $\omega \neq 1$ **:** on a alors que : $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3}\omega^k &= \frac{1-\omega^4}{1-\omega}\\ &\underset{\substack{\omega\ \textbf{solution de}\ (\star_4)\\ \textbf{donc on a}\ :\ \omega^4=1}}{=} \frac{1-1}{1-\omega}\\ &= 0\end{aligned}$$

4. a. Si $\omega = 1$ **:** on a alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = n$.

Si $\omega \neq 1$ **:** on a alors que : $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k &= \frac{1-\omega^n}{1-\omega}\\ &\underset{\substack{\omega\ \textbf{solution de}\ (\star_n)\\ \textbf{donc on a}\ :\ \omega^n=1}}{=} \frac{1-1}{1-\omega}\\ &= 0\end{aligned}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout entier n.

Initialisation : on a $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^0 = 1$ et $\underbrace{\cos(0 \times x)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(0 \times x)}_{=0} = 1$ ce qui donne que $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^0 = \cos(0 \times x) + \mathrm{i}\,\sin(0 \times x)$ ce qui assure que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$.
Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire que l'on a $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} = \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\,\sin((n+1)x)$.
Puisque : $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} = (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n \times (\cos(x) + \sin(x))$
par hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} &= (\cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx))\,(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)) \\
&\underset{\substack{\textbf{Préliminaire}\\ \textbf{technique}}}{=} \cos(nx + x) + \mathrm{i}\,\sin(nx + x) \\
&= \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\,\sin((n+1)x)
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

c. Par définition, ω est solution de $(\star_n)$ si, et seulement si $\omega^n = 1$.
Or on a d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\omega^n &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n \\
&= \cos\left(n \times \frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(n \times \frac{2\pi}{n}\right) \\
&= \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

d. Sur le même principe ω_k est solution de $(\star_n)$ si, et seulement si $(\omega_k)^n = 1$.
Or on a d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned}
(\omega_k)^n &= \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^n \\
&= \cos\left(n \times \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(n \times \frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$