Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5367

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$a_0 = 2,\, b_0 = 0 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + 2b_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\, s_n = a_n + b_n$.

2. Déterminer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\, d_n = a_n - b_n$.

3. Déduire des questions précédentes une expression en fonction de n du terme général des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Étudier alors la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5368

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_{n+1} & = & 7u_n + 8u_{n-1} \end{array} \right.$

1. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\, s_n = u_{n+1} + u_n$.
Démontrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. On considère les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = (-1)^n u_n \text{ et } t_n = v_n - v_{n+1}$$

a. Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire un expression de t_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.

3. Dans tout ce qui suit, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on a : $M^2 - 7M - 8\mathrm{I}_3 = (0)$.

a. Démontrer que M est inversible, et expliciter son inverse en fonction de M et de I_3.

b. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que l'on a $M^0 = a_0 M + b_0 \mathrm{I}_3$, puis déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que $M = a_1 M + b_1 \mathrm{I}_3$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3$.
Démontrer alors que l'on a $M^{n+1} = a_n (7M + 8\mathrm{I}_3) + b_n M$, puis déterminer deux réels a_{n+1} et b_{n+1} que l'on exprimera en fonction de a_n et b_n tels que l'on a $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} \mathrm{I}_3$.

d. Déduire de ce qui précède l'expression de a_n en fonction de n.