Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5367

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$a_0 = 2,\ b_0 = 0 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + 2b_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n$.
2. Déterminer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = a_n - b_n$.
3. Déduire des questions précédentes une expression en fonction de n du terme général des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Étudier alors la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5367

1. Il s'agira d'essayer de voir si cette suite est géométrique, arithmétique ou appartient à une famille de suite connue, et dont on exprimera ensuite le terme général.
2. Il s'agira d'essayer de voir si cette suite est géométrique, arithmétique ou appartient à une famille de suite connue, et dont on exprimera ensuite le terme général.
3. On mettra en forme un système dont les inconnues sont les termes généraux des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on résoudra.
4. On identifie les éventuelles formes indéterminées, que l'on lève pour procéder ensuite au calcul de limite.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5368

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} & = & 7u_n + 8u_{n-1} \end{array} \right.$

1. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_{n+1} + u_n$.
   Démontrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. On considère les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont donnés par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n u_n \text{ et } t_n = v_n - v_{n+1}$$
   a. Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   b. En déduire un expression de t_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.
3. Dans tout ce qui suit, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on a : $M^2 - 7M - 8\mathrm{I}_3 = (0)$.
   a. Démontrer que M est inversible, et expliciter son inverse en fonction de M et de I_3.
   b. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que l'on a $M^0 = a_0 M + b_0 \mathrm{I}_3$, puis déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que $M = a_1 M + b_1 \mathrm{I}_3$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3$.
Démontrer alors que l'on a $M^{n+1} = a_n(7M + 8\mathrm{I}_3) + b_n M$, puis déterminer deux réels a_{n+1} et b_{n+1} que l'on exprimera en fonction de a_n et b_n tels que l'on a $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}\mathrm{I}_3$.

d. Déduire de ce qui précéde l'expression de a_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5368

1. On essaie de trouver un lien entre s_{n+1} et s_n de la forme $s_{n+1} = q \times s_n$ avec q à déterminer.

2. a. On se sert de l'expression de v_{n+1} pour lier t_n à s_n.

b. On exploite simplement les résultats précédents.

c. On exploite le lien entre v_n, t_n et u_n.

3. a. On exploite la relation entre M^2, M et I_3 pour obtenir l'inversibilité de M en revenant à la définition.

b. C'est évident...

c. On se souviendra que $M^{n+1} = M \times M^n$ et on exploitera les différentes relations portant sur les puissances de M rencontrées.

d. Il y a surement un lien avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.