Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5367

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$a_0 = 2,\ b_0 = 0 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + 2b_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n$.

2. Déterminer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = a_n - b_n$.

3. Déduire des questions précédentes une expression en fonction de n du terme général des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Étudier alors la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 5367

1. Un calcul direct donne que : $$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & a_{n+1} + b_{n+1} \\ & = & 2a_n + b_n + a_n + 2b_n \\ & = & 3\left(a_n + b_n\right) \\ & = & 3s_n \end{array}$$

ce qui assure que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $s_0 = 2$.

2. Un calcul direct donne que : $$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{array}{rcl} d_{n+1} & = & a_{n+1} - b_{n+1} \\ & = & 2a_n + b_n - a_n - 2b_n \\ & = & a_n - b_n \\ & = & d_n \end{array}$$

et par conséquent, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $d_0 = 2$.

3. D'après ce qui précède, on a que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} s_n & = & 2 \times 3^n \\ d_n & = & 2 \end{array} \right.$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ccccc} a_n & + & b_n & = & 2 \times 3^n \\ a_n & - & b_n & = & 2 \end{array} \right.$

Par somme, on en déduit trivialement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3^n + 1$

et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 3^n - 1$

Comme $3 > 1$, on a que $3^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par somme il vient que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par conséquent, les deux suites sont toutes les deux divergentes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 5368

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} & = & 7u_n + 8u_{n-1} \end{array} \right.$

1. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_{n+1} + u_n$.
Démontrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. On considère les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n u_n \text{ et } t_n = v_n - v_{n+1}$$

a. Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire un expression de t_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.

3. Dans tout ce qui suit, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on a : $M^2 - 7M - 8\mathrm{I}_3 = (0)$.

a. Démontrer que M est inversible, et expliciter son inverse en fonction de M et de I_3.

b. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que l'on a $M^0 = a_0 M + b_0 \mathrm{I}_3$, puis déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que $M = a_1 M + b_1 \mathrm{I}_3$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3$.
Démontrer alors que l'on a $M^{n+1} = a_n (7M + 8\mathrm{I}_3) + b_n M$, puis déterminer deux réels a_{n+1} et b_{n+1} que l'on exprimera en fonction de a_n et b_n tels que l'on a $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} \mathrm{I}_3$.

d. Déduire de ce qui précéde l'expression de a_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5368

1. Un calcul direct donne que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n \end{aligned}$$
et par conséquent $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $s_0 = 1$.

2. **a.** Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} t_n &= v_n - v_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} \\ &= (-1)^n (u_n + u_{n+1}) \\ &= (-1)^n s_n \end{aligned}$$

b. Puisque $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $s_0 = 1$, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = 8^n$.
On obtient alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = (-1)^n \times 8^n$ ou encore $t_n = (-8)^n$.

c. Puisque : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ -v_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1})$

on obtient que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^{n+1} u_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1})$

Or on a : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i$

ce qui donne que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^{n+1} u_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$

et comme $-3 \neq 1$, il vient que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} \times \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)}$

c'est à dire que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{9} (1 - (-8)^n)$.

3. **a.** Puisque $M^2 - 7M - 8\mathrm{I}_3 = (0)$, il vient que $M(M - 7\mathrm{I}_3) = 8\mathrm{I}_3$ ou encore que $M \times \dfrac{1}{8}(M - 7\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$ ce qui assure que M est inversible à droite, donc inversible et d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{8}(M - 7\mathrm{I}_3)$.

b. Il est immédiat que $a_0 M + b_0 \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3$ et comme $M^0 = \mathrm{I}_3$, on a bien $M^0 = a_0 M + b_0 \mathrm{I}_3$.
En posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, il est clair que $M = a_1 M + b_1 \mathrm{I}_3$.

c. Comme $M^{n+1} = M \times M^n$, puisque $M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3$, et en remarquant que $M^2 = 7M + 8\mathrm{I}_3$ il vient que :
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times (a_n M + b_n \mathrm{I}_3) \\ &= a_n M^2 + b_n M \\ &= a_n (7M + 8\mathrm{I}_3) + b_n M \\ &= (7a_n + b_n) M + 8a_n \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$
et donc en posant $a_{n+1} = 7a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 8a_n$, on a bien déterminé deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} \mathrm{I}_3$.

d. Les deux questions précédentes permettent de construire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_3$ à partir des relations :

$$a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_1 = 0 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 7a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 8a_n \end{array} \right.$$

On en déduit alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 7a_n + 8a_{n-1}$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$

Par conséquent il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{9}\left(1 - (-8)^n\right)$.