Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5360

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{n!}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 2.
2. Justifier alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{3} u_n$.
4. Démontrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2$.
5. Qu'en conclure pour la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5361

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer le signe de $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k(k-1)}$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.
4. Déduire de ce qui précède une expression de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ en fonction de n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ général $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ est une suite majorée.
7. Démontrer alors que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner un majorant de sa limite.