Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5360

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{n!}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 2.
2. Justifier alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{3}u_n$.
4. Démontrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2$.
5. Qu'en conclure pour la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5360

1. On étudiera le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 en prenant toutes les précautions nécessaires.
2. Le théorème portant sur les suites monotones s'applique ici...
3. On pourra montrer que la $u_{n+1} - \dfrac{\mathrm{e}}{3}u_n$ est négatif par exemple.
4. On procèdera par récurrence.
5. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5361

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Déterminer le signe de $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k(k-1)}$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.
4. Déduire de ce qui précède une expression de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ en fonction de n avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ général $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ est une suite majorée.
7. Démontrer alors que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner un majorant de sa limite.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5361

1. On étudiera le signe de $S_{n+1} - S_n$.
2. On réduit au même dénominateur, puis on étudie le signe de ce quotient pour conclure.
3. On procèdera à une réduction au même dénominateur, puis à une identification des numérateurs, ou alors on procèdera par contemplation en justifiant sa réponse.
4. On utilisera la décomposition précédente et un téléscopage de termes.
5. On utilisera le fait que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ pour obtenir la majoration demandée.
6. Il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{n} \geq 0$...pour exhiber un majorant de u_n.
7. Le caractère borné est immédiat par la question précédente, ce qui assure par monotonie de $(S_n)_{n\geq 1}$ sa convergence et un majorant pour sa limite.