Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5360

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{n!}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 2.
2. Justifier alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{3}u_n$.
4. Démontrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2$.
5. Qu'en conclure pour la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 5360

1. Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   Il est immédiat que :
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n &= \frac{\mathrm{e}^{\,n+1}}{(n+1)!} - \frac{\mathrm{e}^{\,n}}{n!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,n+1} - (n+1)\mathrm{e}^{\,n}}{(n+1)!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,n}\,(\mathrm{e} - (n+1))}{(n+1)!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,n}\,(\mathrm{e} - n - 1)}{(n+1)!}\end{aligned}$$
   Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donné par celui de $\mathrm{e} - n - 1$. Or on a : $(\mathrm{e} - n - 1 \leq 0) \Leftrightarrow (n \geq \mathrm{e} - 1)$
   Par suite : $(u_{n+1} - u_n \leq 0) \Leftrightarrow (n \geq 2)$
   Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 2.
2. Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n > 0$.
   Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc par théorème, la suite est convergente vers un réel $\ell \geq 0$.
3. Il est immédiat que :
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ u_{n+1} - \frac{\mathrm{e}}{3}u_n &= \frac{\mathrm{e}^{\,n+1}}{(n+1)!} - \frac{\mathrm{e}^{\,n+1}}{3n!}\\ &= \frac{3\mathrm{e}^{\,n+1} - (n+1)\mathrm{e}^{\,n+1}}{3(n+1)!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,n+1}\,(3 - (n+1))}{3(n+1)!}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,n+1}\,(2 - n)}{3(n+1)!}\end{aligned}$$
   Le signe de $u_{n+1} - \dfrac{\mathrm{e}}{3}u_n$ est clairement celui de $2 - n$ qui est donc ici négatif dès lors que $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, ce qui assure que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ u_{n+1} - \frac{\mathrm{e}}{3}u_n \leq 0$$
   et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{3}u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2}$ »
   Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
   Initialisation : on a clairement que $\underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{2-2}}_{=1} u_2 = u_2$, ce qui assure que $u_2 \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{2-2}$ et donc que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après la question précdente, on a : $u_{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{3} u_n$.

Donc par hypothése de récurrence, il vient donc que : $u_{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{3} \times \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2$

et par suite que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-1} u_2$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 2 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

5. De ce qui précède, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-1} u_2$

Comme $\left|\frac{\mathrm{e}}{3}\right| < 1$, il vient que $\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure par le théorème d'encadrement des limites que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5361

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer le signe de $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)}$.

3. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$.

4. Déduire de ce qui précède une expression de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ en fonction de n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ général $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est une suite majorée.

7. Démontrer alors que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et donner un majorant de sa limite.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5361

1. Les variations de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont données par le signe de $S_{n+1} - S_n$.

Un calcul direct donne que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq 0$$

ce qui assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n \geq 0$

et par suite que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

2. Un calcul direct donne que :
$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(k-1)-k}{k^2(k-1)} = -\frac{1}{k^2(k-1)}$$

Comme $k \geq 2$ par hypothèse, il vient que $k - 1 \geq 0$ et donc finalement que $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} \leq 0$.

3. Il est immédiat que :
$$\begin{aligned}\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1} &= \frac{k-1}{k(k-1)}-\frac{k}{k(k-1)}\\ &= \frac{k-1-k}{k(k-1)}\\ &= -\frac{1}{k(k-1)}\end{aligned}$$

et finalement, il vient que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$

4. Un calcul direct donne alors que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,$
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2-1}-\frac{1}{n}\\ &= 1-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

5. D'après ce qui précède : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{k^2}\leq\dfrac{1}{k(k-1)}$

Donc par sommation de ces inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$

D'où il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \underbrace{\dfrac{1}{1^2}}_{=1}+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$

et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ S_n\leq 1+1-\dfrac{1}{n}$

et par conséquent, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ S_n\leq 2-\dfrac{1}{n}$

6. Il est immédiat que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n}\leq 0$

et par suite que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2-\dfrac{1}{n}\leq 2$

ce qui signifie bien que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.

7. Il est clair que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq S_n$.

Par ailleurs, puisque $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2, il vient que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n\leq 2$

ce aui assure que $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée, et comme elle est minorée, elle est donc bornée.

Par ailleurs, cette dernière étant croissante manjorée, par théorème, elle est convergente, et sa limite ℓ est nécessairement inférieure à tout majorant de $(S_n)_{n\geq 1}$, en particulier 2 d'après ce que l'on vient d'obtenir.