Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1035

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;\pi]$ et pour tout $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par :

$$\forall x\,[0;\pi], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^{\pi} f(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Calculer les images par Φ des fonctions $\cos$ et $\sin$.
3. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$. Établir que $\mathrm{Im}\,(\Phi) \subset F$, puis en déduire $\mathrm{Im}\,(\Phi)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1033

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Quel est le rang de f ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer alors une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Vérifier que : $\left(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 0)$
5. Dans cette question $m = 0$.
   On rappelle que l'on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{f \text{ composée } p \text{ fois avec elle même}}$.

   Déterminer le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ possible tel que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.