## Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

---

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

**Ce travail est à rèaliser en auto-correction.**
**Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.**

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 1622

Pour tout couple de réels $(x,y)$, on note :

$$f(x,y)=(x+y-2)^2+(2x+y-1)^2+(2x+y-3)^2+(3x+y-2)^2$$

Dans tout ce qui suit, on munit l'espace $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique, à savoir :

$$\forall Y\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\qquad \|Y\|^2={}^tYY$$

**1.** En notant $X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, déterminer une matrice $A\in\mathscr{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et une matrice $B\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, telle que $f(x,y)=\|AX-B\|^2$.

**2.** En déduire que la fonction $f$ présente un minimum atteint en un unique couple $(x_0,y_0)$ que l'on déterminera, et en préciser la valeur.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 1495

**1.** À l'aide de la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t}$ et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\dfrac{1}{k}$.

**2.** Soit $(u_n)_{n\geq1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

- **a.** Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geq\ln(n+1)$
- **b.** Qu'en conclure pour $(u_n)_{n\geq1}$ ?

**3.** Soit $(v_n)_{n\geq1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=u_n-\ln(n)$.

- **a.** Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\geq0$.
- **b.** Démontrer que $(v_n)_{n\geq1}$ est décroissante.
- **c.** Déduire des questions précédentes que $v$ admet une limite positive notée $\gamma$.
  *Cette constante $\gamma$ est appelée constante d'Euler.*