Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 5348

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On désigne par J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta J$.

b. Vérifier que $\alpha \mathrm{I}_3 \times \beta J = \beta J \times \alpha \mathrm{I}_3$.

2. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1} J$.

a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer alors A^n en fonction de I_3 et de J.

b. L'expression de A^n précédemment trouvée est-elle encore vraie pour $n = 0$? pour $n = 1$?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 5347

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On considère l'équation $(\heartsuit) :\ x^2 - x - 2 = 0$.

a. Déterminer les deux solutions réelles x_1 et x_2 de $(\heartsuit)$.

b. Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.

2. Déterminer deux réels a et b tels que $(A - a\mathrm{I}_3)(A - b\mathrm{I}_3) = (0)$ où l'on supposera que $a < b$.

3. Montrer que les deux matrices P et Q définies ci-dessous sont telles que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$:

$$P = \frac{1}{b-a}(A - a\mathrm{I}_3) \text{ et } Q = \frac{1}{a-b}(A - b\mathrm{I}_3)$$

4. Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha P + \beta Q$.

5. Les matrices P et Q vérifient-elles $P \times Q = Q \times P$?

6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Exprimer A^n en fonction de P et de Q.

7. Montrer que A est inversible, puis expliciter A^{-1}.

8. On se propose de résoudre l'équation $(\star)$ d'inconnue la matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$(\star) :\ XA + AX = \mathrm{I}_3$$

a. Montrer que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $A^2 X = XA^2$.

b. En déduire que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $AX = XA$.

c. Résoudre alors l'équation $(\star)$.