Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1035

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;\pi]$ et pour tout $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par :

$$\forall x\,[0;\pi], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^{\pi} f(t)\sin(x+t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Calculer les images par Φ des fonctions $\cos$ et $\sin$.
3. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\cos,\sin)$. Établir que $\mathrm{Im}\,(\Phi) \subset F$, puis en déduire $\mathrm{Im}\,(\Phi)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1035

Le plus difficile dans l'exercice consiste à comprendre comment est défini Φ.

1. On vérifie que f est linéaire...
2. C'est un calcul d'intégrale faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Peut-être qu'un regard du côté des formules de trigonométries peut nous simplifier le travail...
3. S'assurer dans un premier temps que $\Phi(cos)$ et $\Phi(sin)$ s'expriment comme combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$ et transformer l'expression de $\Phi(f)$ en utilisant les formules de trigonométrie pour mettre en évidence que $\Phi(f)$ appartient à F.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1033

On note $\mathcal{B} = (e_1,\,\ldots,\,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Quel est le rang de f ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer alors une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Vérifier que : $\left(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 0)$
5. Dans cette question $m = 0$.
   On rappelle que l'on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\substack{f \text{ composée } p \text{ fois} \\ \text{avec elle même}}}$.

   Déterminer le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ possible tel que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1033

1. Revenir à la définition de ce que c'est qu'être un élément du noyau...
2. Un échelonnement de la matrice de f permet d'obtenir le rang, mais il est aussi possible d'utiliser le résultat de la

question précédente pour répondre à cette question.

3. On utilise alors le théorème du rang pour obtenir la dimension du noyau, et de fait une base, puis il reste à donner une base de l'image.
4. Il y a un raisonnement par double implication à faire. Un sens est évident...
5. Faire le lien entre f^p et A^p où A est la matrice de f, pour pouvoir à chaque fois déterminer une base du noyau et de l'image de f^p et obtenir la valeur de p souhaitée.