Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1622

Pour tout couple de réels (x, y), on note :

$$f(x,y) = (x+y-2)^2 + (2x+y-1)^2 + (2x+y-3)^2 + (3x+y-2)^2$$

Dans tout ce qui suit, on munit l'espace $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique, à savoir :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \qquad \|Y\|^2 =^t YY$$

1. En notant $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, telle que $f(x,y) = \|AX - B\|^2$.
2. En déduire que la fonction f présente un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et en préciser la valeur.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1495

1. À l'aide de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   - **a.** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \ln(n+1)$
   - **b.** Qu'en conclure pour $(u_n)_{n\geq 1}$?
3. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - \ln(n)$.
   - **a.** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0$.
   - **b.** Démontrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   - **c.** Déduire des questions précédentes que v admet une limite positive notée γ.
     Cette constante γ est appelée constante d'Euler.