Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5348

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On désigne par J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta J$.
- **b.** Vérifier que $\alpha \mathrm{I}_3 \times \beta J = \beta J \times \alpha \mathrm{I}_3$.

2. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1} J$.

- **a.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer alors A^n en fonction de I_3 et de J.
- **b.** L'expression de A^n précédemment trouvée est-elle encore vraie pour $n = 0$? pour $n = 1$?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5348

1.
- **a.** La décomposition est assez évidente...
- **b.** Soit on procède explicitement au calcul, soit on utilise les règles opératoires propres aux matrices.

2.
- **a.** On utilisera le binôme de Newton à partir de la relation $A = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta J$.
- **b.** Tout est dit dans la question...on remplace n par 0 puis par 1 dans la formule et on regarde si le résultat vaut bien $A^0 = \mathrm{I}_3$ et $A^1 = A$ comme attendu dans ce cas.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5347

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On considère l'équation $(\heartsuit)$: $x^2 - x - 2 = 0$.

- **a.** Déterminer les deux solutions réelles x_1 et x_2 de $(\heartsuit)$.
- **b.** Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.

2. Déterminer deux réels a et b tels que $(A - a\mathrm{I}_3)(A - b\mathrm{I}_3) = (0)$ où l'on supposera que $a < b$.

3. Montrer que les deux matrices P et Q définies ci-dessous sont telles que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$:

$$P = \frac{1}{b-a}(A - a\mathrm{I}_3) \text{ et } Q = \frac{1}{a-b}(A - b\mathrm{I}_3)$$

4. Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha P + \beta Q$.

5. Les matrices P et Q vérifient-elles $P \times Q = Q \times P$?

6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Exprimer A^n en fonction de P et de Q.

7. Montrer que A est inversible, puis expliciter A^{-1}.

8. On se propose de résoudre l'équation $(\star)$ d'inconnue la matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$(\star) : XA + AX = \mathrm{I}_3$$

a. Montrer que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $A^2X = XA^2$.

b. En déduire que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $AX = XA$.

c. Résoudre alors l'équation $(\star)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5347

1. a. On commencera par calculer le discriminant...

b. Les calculs sont immédiats.

2. On peut par exemple développer l'expression proposée, et procéder à une identification des coefficients avec ceux de la matrice nulle, de sorte à voir apparaître un jeu de conditions portant sur a et b que l'on mettra en rapport avec la question précédente.

3. Il suffit de faire le calcul...

4. On utilise l'expression de P et Q précédemment trouvée...pour décomposer A.

5. On fait le calcul...et on pourra remarquer que $PQ = QP = (0)$ pour la suite.

6. On utilisera le binôme de Newton...et décomposant la somme puisque toutes les puissances de P (et de Q) sont égales à P (et à Q) surtout que $PQ = QP = (0)$...

7. On pourra chercher le rang de A et procéder par un échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$ pour expliciter A^{-1}.

8. a. On multiplie $(\star)$ à gauche puis à droite par A...

b. On pourra utiliser le fait que $A^2 = 2\mathrm{I}_3 + A$.

c. On transforme l'équation $(\star)$ à l'aide de la question précédente, mais on n'oubliera pas de vérifier sa solution...