Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1035

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;\pi]$ et pour tout $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par :

$$\forall x\,[0;\pi], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^\pi f(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Calculer les images par Φ des fonctions $\cos$ et $\sin$.

3. On pose $F = \text{Vect}\,(\cos,\sin)$. Établir que $\text{Im}\,(\Phi) \subset F$, puis en déduire $\text{Im}\,(\Phi)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1035

1. Pour $f \in E$, en utilisant le développement de la formule de trigonométrie $\sin(a+b)$, on peut montrer que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0;\pi], \quad \Phi(f)(x) = \sin(x)\underbrace{\int_0^\pi f(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}} + \cos(x)\underbrace{\int_0^\pi f(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}}$$

donc la fonction $x \longmapsto \Phi(f)(x)$ est bien continue sur $[0;\pi]$ et ainsi $\Phi(f)(x) \in E$ et finalement $\Phi : E \longrightarrow E$.
Soit $f_1 \in E$, $f_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $g = \lambda f_1 + f_2$. Par définition de Φ, on a : $\Phi(g) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t$.

Ainsi, on a :
$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;\pi], \quad \Phi(g)(x) &= \int_0^\pi g(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\lambda f_1 + f_2)(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\lambda f_1(t) + f_2(t))\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\lambda f_1(t)\sin(x+t) + f_2(t)\sin(x+t))\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \lambda f_1(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f_2(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda\int_0^\pi f_1(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t + \int_0^\pi f_2(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda\Phi(f_1)(x) + \Phi(f_2)
\end{aligned}$$

et ainsi $\Phi(g) = \lambda\Phi(f_1) + \Phi(f_2)$, et par conséquent, Φ est bien linéaire. Comme $\Phi : E \longrightarrow E$, Φ est alors un endomorphisme de E.

2. Par définition de Φ, on a $\Phi(\cos) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t$ et $\Phi(\sin) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;\pi], \quad \Phi(\cos)(x) &= \int_0^\pi \cos(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x+t+t) - \sin(t-(x+t)))\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin(x+2t) + \sin(x))\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(x+2t) + \sin(x)t\right)_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\cos(x+2\pi) + \sin(x)\times\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(x) + \sin(x)\times 0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in [0;\pi]\,, \quad \Phi(\sin)(x) &= \int_0^\pi \sin(t)\sin(x+t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos(t-(x+t)) - \cos(t+(x+t))\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(x) - \cos(x+2t))\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(x)t - \frac{1}{2}\sin(x+2t) + \sin(x)t\right)_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\cos(x)\pi - \frac{1}{2}\sin(x+2\pi)\times\pi\right) - \left(\cos(x)\times 0 - \frac{1}{2}\sin(x)+\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\cos(x)\end{aligned}$$

En conclusion, on a $\Phi(\cos) : x \longmapsto \frac{\pi}{2}\sin(x)$ et $\Phi(\sin) : x \longmapsto \frac{\pi}{2}\cos(x)$.

3. En utilisant le développement de la formule de trigonométrie $\sin(a+b)$, on peut montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f)(x) = \sin(x)\underbrace{\int_0^\pi f(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}} + \cos(x)\underbrace{\int_0^\pi f(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}}$$

Ainsi, il est immédiat que $\mathrm{Im}\ (\Phi) \subset \mathrm{Vect}\ (\cos,\sin)$.
Par ailleurs, si $f \in \mathrm{Vect}\ (\cos,\sin)$, on montre alors que $\Phi(f) \in \mathrm{Vect}\ (\cos,\sin)$ d'après la question précédente et la linéarité de Φ, ce qui assure que $\mathrm{Im}\,(\Phi) = \mathrm{Vect}\ (\cos,\sin)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1033

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Quel est le rang de f ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer alors une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Vérifier que : $\left(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 0)$
5. Dans cette question $m = 0$.
   On rappelle que l'on note $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\substack{f\text{ composée } p \text{ fois} \\ \text{avec elle même}}}$.
   Déterminer le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ possible tel que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \cap \mathrm{Im}\,(f^p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1033

Dans toute la suite, on note $E_1, \ldots E_4$ les représentations matricielles des vecteurs $e_1, \ldots e_4$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Par définition de $\mathrm{Ker}\,(f)$, on a que : $(e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(f(e_1+e_4) = \overrightarrow{0}\right)$. Par linéarité de f, cela revient à montrer que $f(e_1) + f(e_4) = \overrightarrow{0}$.
   Matriciellement, cela se traduit par le calcul de $A(E_1 + E_2) = AE_1 + AE_4$ qui vaut après calcul la matrice colonne nulle. Par conséquent $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
   Un raisonnement analogue permet de montrer que $me_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Les deux premières colonnes de la matrice A sont clairement linéairement indépendantes, donc nécessairement $\mathrm{rg}\,(f) \geq 2$. Mais la question précédente nous donne deux vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(f)$ aussi linéairement indépendants,

donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$ aussi. Par le théorème du rang, puisque $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4} = \underbrace{\mathrm{rg}(f)}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\geq 2}$, il vient que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

3. Puisque $\mathrm{rg}(f) = 2$, il vient alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ d'après le théorème du rang précédemment cité. Ainsi, les deux vecteurs $e_1 + e_4$ et $me_1 + e_3$ étant non nuls non colinéaires, ils forment une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 et forment alors par théorème une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Puisque $\mathrm{rg}(f) = 2$ et que les deux premières colonnes de la matrice A sont indépendantes, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ forment une famille de deux vecteurs non nuls non colinéaires, donc libre dans un espace de dimension 2. Cela en est donc une base.

4. Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $u = x(e_1 + e_4) + y(me_1 + e_3)$ et $u = ze_3 + t(-e_1 + me_2 + e_4)$, donc par identification, on a le système $\begin{cases} x + my + t = 0 \\ -mt = 0 \\ y - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$. Si $m \neq 0$, on trouve $u = \overrightarrow{0}$. En revanche, si $m = 0$, on trouve des solutions u non nulles puisque le rang du système linéaire est au plus 3.

5. Si $m = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ et $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3, e_4)$ de sorte que $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) \cap \mathrm{Im}\left(f^2\right) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

$f^3 = \tilde{0}$, donc $\mathrm{Ker}\left(f^3\right) = \mathbb{R}^4$ et $\mathrm{Im}\left(f^3\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, et ces sous-espaces vectoriels ont une intersection non nulle, donc $p = 3$ convient.