Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1622

Pour tout couple de réels (x,y), on note :

$$f(x,y)=(x+y-2)^2+(2x+y-1)^2+(2x+y-3)^2+(3x+y-2)^2$$

Dans tout ce qui suit, on munit l'espace $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique, à savoir :

$$\forall Y\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\qquad \|Y\|^2={}^tYY$$

1. En notant $X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, déterminer une matrice $A\in\mathscr{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ et une matrice $B\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, telle que $f(x,y)=\|AX-B\|^2$.
2. En déduire que la fonction f présente un minimum atteint en un unique couple (x_0,y_0) que l'on déterminera, et en préciser la valeur.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1622

1. Soit $X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En posant $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\2\end{pmatrix}$, il vient $AX-B=\begin{pmatrix}x+y-2\\2x+y-1\\2x+y-3\\3x+y-2\end{pmatrix}$ qui donne bien $\|AX-B\|^2=f(x,y)$.
2. La matrice A est bien de rang 2 car ses colonnes ne sont pas proportionnelles. Ainsi, par théorème il existe une unique matrice colonne $X_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ rendant minimum $\|AX-B\|$, cette matrice X_0 étant solution de l'équation matricielle ${}^tAAX={}^tAB$.
   Ici, on a ${}^tAA=\begin{pmatrix}15&8\\8&4\end{pmatrix}$, ${}^tAB=\begin{pmatrix}16\\8\end{pmatrix}$, et $({}^tAA)^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&-8\\-8&15\end{pmatrix}$, qui donne $X_0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ existe et est atteint en $(x,y)=(0,2)$ et vaut alors $f(0,2)=\ldots=2$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1495

1. À l'aide de la fonction $t\longmapsto\frac{1}{t}$ et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln(k)\le\frac{1}{k}$.
2. Soit $(u_n)_{n\ge1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   - **a.** Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\ge\ln(n+1)$
   - **b.** Qu'en conclure pour $(u_n)_{n\ge1}$?
3. Soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=u_n-\ln(n)$.
   - **a.** Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\ge0$.
   - **b.** Démontrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est décroissante.

c. Déduire des questions précédentes que v admet une limite positive notée γ.
Cette constante γ est appelée constante d'Euler.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1495

1. Soit $k \geq 1$, alors, pour tout $k \leq t \leq k+1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k+1}$, et en intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$, on en déduit que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$, soit finalement $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

2. Pour $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$, et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. **a.** Pour $n \geq 1$, $u_n \geq \ln(n+1) \geq \ln(n)$ donc $v_n = u_n - \ln(n) \geq 0$.

b. Pour $n \geq 1$, on a : $\displaystyle v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - \ln(n+1)) - (u_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq 0$ d'après la 1e question. La suite v est par suite décroissante.

c. La suite v est décroissante et minorée par 0, elle converge et sa limite γ est positive ou nulle.

4. Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = u_{2n-1} - u_{n-1}$. Par suite,

$$w_n = v_{2n-1} + \ln(2n+1) - v_{n-1} - \ln(n-1) = v_{2n-1} - v_{n-1} + \ln\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_{2n-1} - v_{n-1}) = \gamma - \gamma = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{n-1}\right) = \ln(2)$, on en déduit que la suite w est convergente, et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln(2)$.