Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5348

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On désigne par J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta J$.

b. Vérifier que $\alpha \mathrm{I}_3 \times \beta J = \beta J \times \alpha \mathrm{I}_3$.

2. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1} J$.

a. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer alors A^n en fonction de I_3 et de J.

b. L'expression de A^n précédemment trouvée est-elle encore vraie pour $n = 0$? pour $n = 1$?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5348

1. a. Il est immédiat que $A = 3\mathrm{I}_3 - J$.

b. On a :

$$\begin{aligned} \alpha \mathrm{I}_3 \times \beta J &= \alpha \times \beta \times \mathrm{I}_3 \times J \\ &= \alpha\beta \times J \\ &= \alpha\beta \times J \times \mathrm{I}_3 \\ &= \beta J \times \alpha \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

2. a. D'après ce qui précède, on peut utiliser le binôme de Newton, pour obtenir que :

$$\begin{aligned}
A^n &= (3\mathrm{I}_3 - J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3\mathrm{I}_3)^{n-k} (-J)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \underbrace{\mathrm{I}_3^{n-k}}_{=\mathrm{I}_3} \times (-1)^k J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times J^k \\
&= \binom{n}{0} 3^{n-0} \times (-1)^0 \times J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times J^k \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times 3^{k-1} J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times 3^{k-1} \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times 3^{k} \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times 3^{k} - \binom{n}{0} 3^{n-0} \times (-1)^0 \right) \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-1)^k \times 3^{k} - 3^n \right) \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \left(\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-3)^k - 3^n \right) \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3} \left((3-3)^n - 3^n \right) J \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 - 3^{n-1} J
\end{aligned}$$

b. Dans le cas où $n = 0$, la formule précédente donnerait que $A^0 = \mathrm{I}_3 + 3J$ ce qui n'est pas vrai, et dans le cas où $n = 1$, on obtiendrait $A^1 = 3\mathrm{I}_3 + J$ ce qui n'est clairement pas le cas aussi...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5347

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On considère l'équation $(\heartsuit) :\ x^2 - x - 2 = 0$.
   a. Déterminer les deux solutions réelles x_1 et x_2 de $(\heartsuit)$.
   b. Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $(A - a\mathrm{I}_3)(A - b\mathrm{I}_3) = (0)$ où l'on supposera que $a < b$.
3. Montrer que les deux matrices P et Q définies ci-dessous sont telles que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$:

$$P = \frac{1}{b-a}(A - a\mathrm{I}_3) \text{ et } Q = \frac{1}{a-b}(A - b\mathrm{I}_3)$$

4. Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha P + \beta Q$.
5. Les matrices P et Q vérifient-elles $P \times Q = Q \times P$?
6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Exprimer A^n en fonction de P et de Q.
7. Montrer que A est inversible, puis expliciter A^{-1}.
8. On se propose de résoudre l'équation $(\star)$ d'inconnue la matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$(\star) :\ XA + AX = \mathrm{I}_3$$

a. Montrer que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $A^2X = XA^2$.

b. En déduire que si X est solution de $(\star)$, alors X est telle que $AX = XA$.

c. Résoudre alors l'équation $(\star)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5347

1. a. $(\heartsuit)$ est une équation de degré 2 dont le discriminant $\Delta = 9$ donc possède deux solutions réels qui sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

b. Un calcul direct donne que $x_1 + x_2 = -1$ et $x_1x_2 = -2$.

2. Il est immédiat que :
$$\begin{array}{rcl}(A-a\mathrm{I}_3)(A-b\mathrm{I}_3) &=& A^2 - bA\mathrm{I}_3 - a\mathrm{I}_3A + ab\mathrm{I}_3\\ &=& A^2 - bA - aA + ab\mathrm{I}_3\\ &=& A^2-(a+b)A+ab\mathrm{I}_3\end{array}$$

et un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

Par suite : $A^2-(a+b)A+ab\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}ab+2&1-a-b&1-a-b\\1-a-b&ab+2&1-a-b\\1-a-b&1-a-b&ab+2\end{pmatrix}$

Ainsi, les deux réels a et b cherchés doivent vérifier $\begin{cases}a+b=1\\ab\quad=-2\end{cases}$

D'après la question précédente, les deux réels $a=-1$ et $b=2$ conviennent.

3. Un calcul direct donne que : $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et par suite que $P^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$ c'est à dire que $P^2=P$.

De même $Q = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ et par suite que $Q^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}$ c'est à dire $Q^2=Q$.

4. Il est immédiant que : $2\times\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix} = A$ c'est à dire $A = 2P+Q$ ce qui est la décomposition cherchée.

5. Un calcul direct donne que $P\times Q = Q\times P$.

6. Puisque $PQ = QP$, et en particulier que $PQ = (0)$, il est clair que $2P\times Q = Q\times 2P$, et comme $P^2=P$ et $Q^2=Q$, il vient que $P^k=P$ et $Q^k=Q$ pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et ainsi, on a :
$$\begin{array}{rcl}A^n &=& (2P+Q)^n\\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2P)^kQ^{n-k}\\ &=& \displaystyle\binom{n}{0}(2P)^0Q^{n-0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(2P)^kQ^{n-k}+\binom{n}{n}(2P)^nQ^{n-n}\\ &=& \displaystyle Q^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^kP^kQ^{n-k}+2^nP^n\\ &\underset{\substack{P^2=P\\Q^2=Q}}{=}& \displaystyle Q^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^k\underbrace{PQ}_{=(0)}+2^nP^n\\ &=& Q^n+2^nP^n\end{array}$$

7. On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-1L_1}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&-1&1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.

On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. **a.** Supposons que X soit solution de $(\star)$.

On a donc $AXA + A^2X = A$, donc $A^2X = A - AXA$.

De même $XA^2 + AXA = A$, donc $XA^2 = A - AXA$, et par suite $A^2X = XA^2$.

b. Supposons que X soit solution de $(\star)$.

D'après la question précédente, on a $A^2X = XA^2$. Comme $A^2 = 2\mathrm{I}_3 + A$, il vient que $(2\mathrm{I}_3 + A)\,X = X\,(2\mathrm{I}_3 + A)$ ce qui donne que $\mathrm{I}_3 \times 2X + AX = 2X \times \mathrm{I}_3 + XA$ c'est à dire que $2X + AX = AX + XA$ et donc que $XA = AX$.

c. Si X est une solution de $(\star)$, alors d'après ce qui précède $AX = XA$ et donc on doit avoir $2AX = \mathrm{I}_3$ c'est à dire que $A \times 2X = \mathrm{I}_3$ et donc que A est inversible à droite, donc inversible, et que son inverse est $2X$.

Ainsi, $X = \dfrac{1}{2}A^{-1}$.

Réciproquement, la matrice $X = \dfrac{1}{2}A^{-1}$ est bien solution de $(\star)$, ce qui assure que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $\left\{\dfrac{1}{2}A^{-1}\right\}$.