**Consignes générales | Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

**Ce travail est à rèaliser en auto-correction.**
**Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.**

## Un peu de technique

**EX. 1** | Réf. 1433

Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. L'objectif de cet exercice est de démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$\mathcal{P}_1$ **:** il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \big(x_0, u(x_0), \ldots u^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de $E$.

$\mathcal{P}_2$ **:** l'endomorphisme $u$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes.

**1.** Supposons que la condition $\mathcal{P}_1$ est remplie et posons $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
 - **a.** Démontrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \geq n-1$.
 - **b.** En déduire la dimension des sous-espaces propres de $u$.
 - **c.** Démontrer que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

**2.** Supposons réciproquement que la condition $\mathcal{P}_2$ est remplie. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $u$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$ telle que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. On pose $x_0 = e_1 + \ldots + e_n$.
 - **a.** Calculer, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, le vecteur $u^i(x_0)$.
 - **b.** On considère $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$.
   Démontrer que $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ est le polynôme nul.
 - **c.** Démontrer alors que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

**EX. 2** | Réf. 5375

**1.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

**2.** Soit $f : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Montrer que $f$ définit une densité de probabilité.

**3.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant $f$ pour densité.
 - **a.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.
 - **b.** La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires indépendantes $T_1$, $T_2$ et $T_3$, chacune de même loi que $X$.

**4.** Onconsidère la variable aléaoire $U = \inf\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [U > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap [T_3 > t]$$

 - **a.** Déterminer la fonction de répartion $G$ de $U$.
 - **b.** Montrer que $U$ admet une densité et déterminer une densité $g$ d e$U$.
 - **c.** Montrer que $U$ admet une espérance et calculer $E(U)$.

**5.** On considère la variable aléatoire $V = \sup\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leq t] = [T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap [T_3 \leq t]$$

**a.** Déterminer la fonction de répartition $H$ de $V$.

**b.** Montrer que $V$ admet une densité et déterminer une densité $h$ de $V$.

**c.** La variable aléatoire $V$ admet-elle une espérance ?