Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2202

La couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentées par deux vecteurs colonnes C et I où :

$C = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ où
- r : intensité de la composante rouge
- g : intensité de la composante verte
- b : intensité de la composante bleue

$I = \begin{pmatrix} i \\ \ell \\ c \end{pmatrix}$ où
- i : intensité de la lumière avec : $i = \dfrac{r+g+b}{3}$
- ℓ : intensité des ondes longues avec : $\ell = r - g$
- c : intensité des ondes courtes avec : $c = b - \dfrac{r+g}{2}$

La rétine d'un oeil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les batônnets.
Les premièrs sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite *scotopique* et vision à niveaux de gris) et ne voient pas les couleurs. Ils mesurent l'intensité i de la lumière visible.
Les seconds sont responsables de la vision diurne colorée. La vision des couleurs n'est pas toutefois directe, mais est envoyée au cerveau au moyen d'un signal nerveux.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AC = I$.
2. Calculer l'inverse de A.
3. Donner les composantes r, g et b en fonction de i, ℓ et c.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2202

Un peu de modélisation...

1. Identifier une matrice à partir de relations entre des grandeurs physiques
2. Inverser une matrice.
3. Exploiter une relation matricielle pour en déduire des relations entre grandeurs physiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2412

Soients : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $E = \mathrm{Vect}\,(I, J, K, L)$ et Id_E l'endomorphisme identité de E. On pose $A = J + K$.

1. Montrer que (I, J, K, L) est une base de E. Quelle est alors la dimension de E ? Justifier.
2. Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
3. Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.
4. En déduire que E est stable pour le produit matriciel, c'est à dire que : $\forall\,(M, N) \in E \times E, \quad M \times N \in E.$
5. Calculer A^2.
6. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
7. On considère maintenant l'application $\varphi_A : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMA^{-1} \end{array}\right.$.

   a. Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.

   b. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2412

1. Montrer qu'une famille est une base.
2. Obtenir la dimension d'un espace vectoriel à partir d'une base.
3. Effectuer des produits matriciels pour en déduire des relations.
4. Effectuer des produits matriciels pour en déduire des relations.
5. Montrer que des vecteurs satisfont une particularité.
6. Calculer le carré d'une matrice.
7. Exploiter une relation matricielle pour en déduire l'inversibilité d'une matrice.
8. **a.** Montrer qu'une application est linéaire.
   b. Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.