Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1433

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. L'objectif de cet exercice est de démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$\mathcal{P}_1$ **:** il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, u(x_0), \dots u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

$\mathcal{P}_2$ **:** l'endomorphisme u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Supposons que la condition $\mathcal{P}_1$ est remplie et posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

a. Démontrer que : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rg}\,(A - \lambda \mathrm{I}_n) \geq n-1$.

b. En déduire la dimension des sous-espaces propres de u.

c. Démontrer que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

2. Supposons réciproquement que la condition $\mathcal{P}_2$ est remplie. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u telle que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. On pose $x_0 = e_1 + \dots + e_n$.

a. Calculer, pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, le vecteur $u^i(x_0)$.

b. On considère $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$.
Démontrer que $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ est le polynôme nul.

c. Démontrer alors que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5375

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \end{array} \right.$.

Montrer que f définit une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

a. Déterminer la fonction de répartition de X.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3, chacune de même loi que X.

4. Onconsidère la variable aléaoire $U = \inf\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [U > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap [T_3 > t]$$

a. Déterminer la fonction de répartion G de U.

b. Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g d eU.

c. Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On considère la variable aléatoire $V = \sup\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leq t] = [T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap [T_3 \leq t]$$

a. Déterminer la fonction de répartition H de V.

b. Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.

c. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?