Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5336

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\, x - 2y + z - t = 0\right\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 tels que $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.
3. Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5336

1. On montrera que le vecteur nul appartient à F et que F est stable par combinaison linéaire.
2. On exploitera la définition des éléments de F pour extraire une relation que doivent vérifier les composantes des éléments de F sous forme de combinaison linéaire d'éléments de F.
3. On pourra soit mobiliser la définition d'une famille libre qui conduira à travailler sur un système homogène, soit on utilisera la matrice de la famille de vecteurs.

EX. 2 | Réf. 5337

Dans tout ce qui suit, m désigne un réel quelconque.
On considère la famille $\mathcal{F}_m$ formée par les 4 vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous :

$$u_1 = (1,1,m) \quad u_2 = (1,1,1+m) \quad u_3 = (m,m,1) \quad u_4 = \left(m+1, m^2-1, m\right)$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m la famille $\mathcal{F}_m$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5337

- Le caractère générateur s'étudie soit en mobilisant la définition d'une famille génératrice ce qui revient à étudier la compatibilité d'un système...
- ...soit en étudiant le rang de la matrice de la famille de vecteurs.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5338

On considère les deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^4$ définis ci-dessous :

$$F = \left\{(x,y,t,z) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\right\} \quad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\, x + t = 0\right\}$$

et on désigne alors par H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini comme étant l'intersection de F et G, c'est à dire que $H = F \cap G$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer trois vecteurs g_1, g_2 et g_3 tels que $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$. Qu'en déduire pour G ?
3. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Démontrer que H est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5338

1. On montrera en particulier que F est stable par combinaison linéaire.
2. On traduira les conditions qui définissent les éléments de G sous forme de relations entre les composantes de ces mêmes vecteurs. Le fait que l'on puisse écrire que $G = \mathrm{Vect}\,(\ldots)$ assurera le côté sous-espace vectoriel.
3. On montrera en particulier que H est stable par combinaison linéaire, en utilisant le fait que les vecteurs de H appartiennent à la fois à F et à la fois à G.
4. Il s'agit de trouver une famille génératrice de H qui soit formée de deux vecteurs.