Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 1433

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. L'objectif de cet exercice est de démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$\mathcal{P}_1$ **:** il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, u(x_0), \ldots u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

$\mathcal{P}_2$ **:** l'endomorphisme u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Supposons que la condition $\mathcal{P}_1$ est remplie et posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

a. Démontrer que : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rg}\,(A - \lambda \mathrm{I}_n) \geq n-1$.

b. En déduire la dimension des sous-espaces propres de u.

c. Démontrer que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

2. Supposons réciproquement que la condition $\mathcal{P}_2$ est remplie. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u telle que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. On pose $x_0 = e_1 + \ldots + e_n$.

a. Calculer, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, le vecteur $u^i(x_0)$.

b. On considère $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$.
Démontrer que $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ est le polynôme nul.

c. Démontrer alors que la condition $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 1433

1. a. On commence par déterminer A ; le vecteur $u^n(x_0)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $u^n(x_0) = a_1 x_0 + a_n u(x_0) + \ldots + a_n u^{n-1}(x_0)$. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, …, $u(e_{n-1}) = e_n$ et donc $u(e_n) = a_1 e_1 + \ldots a_n e_n$. D'où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & & & \vdots & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix} \text{ et par suite pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \quad A - \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & & & \vdots & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Les $n-1$ premières colonnes de cette dernière matrice forment une famille libre (par échelonnement), de sorte que $\mathrm{rg}\,(A - \lambda \mathrm{I}_n = n-1$ ou n. Finalement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{rg}\,(A - \lambda \mathrm{I}_n) \geq n-1$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ associé à cette valeur propre a une dimension au moins égale à 1. D'autre part, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(E_\lambda(u)) \leq 1$, ce qui démontre que les sous-espaces propres de u ont une dimension égale à 1.

c. Désignons par p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de l'endomorphisme u et par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres. Puisque l'endomorphisme u est diagonalisable par hypothèse, on sait que $\dim(E_{\lambda_1}(u)) + \ldots + \dim\left(E_{\lambda_p}(u)\right) = \dim(E) = n$. Or d'après la question précédente, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, donc l'égalité précédente implique $p = n$, et ainsi, u possède n valeurs propres distinctes deux à deux.

2. a. On trouve, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $u^i(x_0) = \lambda_1^i e_1 + \ldots \lambda_n^i e_n$.

b. L'égalité $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$ s'écrit alors :

$$\alpha_0 (e_1 + \ldots + e_n) + \alpha_1 (\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n) + \ldots + \alpha_{n-1} \left(\lambda_1^{n-1} e_1 + \ldots + \lambda_n^{n-1} e_n\right) = 0$$

En utilisant la liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ possède donc n racines deux à deux distinctes à savoir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Puisque P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, on peut en conclure que c'est le polynôme nul.

c. D'après la question précédente, la famille $\mathcal{B} = \left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une famille libre qui est composée de n vecteurs dans un espace de dimension n. C'est donc une base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5375

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

2. Soit $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \end{array} \right.$.

Montrer que f définit une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

a. Déterminer la fonction de répartition de X.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3, chacune de même loi que X.

4. Onconsidère la variable aléaoire $U = \inf\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [U > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap [T_3 > t]$$

a. Déterminer la fonction de répartion G de U.

b. Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g d eU.

c. Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On considère la variable aléatoire $V = \sup\{T_1, T_2, T_3\}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leq t] = [T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap [T_3 \leq t]$$

a. Déterminer la fonction de répartition H de V.

b. Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.

c. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5375

1. La fonction $x \to \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ n'est impropre qu'en $+\infty$

Pour $M \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_2^M \frac{1}{x\sqrt{x}}dx \int_2^M x^{-3/2}dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_2^M = -2M^{-1/2} + 2^{1/2} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$. Donc l'intégrale est convergente et vaut $\sqrt{2}$

2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et est positive ou nulle. On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui, puisque f est nulle sur $]-\infty; 2[$, revient à étudier celle de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}t$ ou encore celle de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, ce que l'on a établi à la question précédente, et comme cette dernière vaut $\sqrt{2}$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

3. a. La fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Elle vaut donc :

- si $x \leq 2$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$
- si $x \geq 2$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} \frac{1}{t\sqrt{2t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}t^{-1/2}\right]_2^x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

b. X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Or pour $x \geq 2$, on a $xf(x) = \dfrac{x}{x\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale diverge.

Donc X n'a pas d'espérance.

4. a. G est définie par $G(x) = p(U \leq x) = 1 - p(U > x)$. Comme T_1, T_2, et T_3 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} P(U > t) &= P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \cdot P(T_3 > t) \\ &= (1 - F(t))^3 \end{aligned}$$

et finalement : $G(t) = 1 - (1 - F(t))^3$

b. On vérifie que la fonction de répartition de U satisfait aux conditions habituelles :

- Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, G l'est aussi comme composée de fonctions continues.
- Ici, G est de classe C^1 là où F l'est, c'est à dire sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, là où f est continue.

De plus Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ on a $G'(x) = -(1 - F(t))^2(-F'(t)) = 3(1 - F(t))^2 f(t)$.

Finalement U a pour densité g défini par $g(x) = G'(x)$.

Donc $\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ g(x) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

c. On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ impropre en $\pm\infty$

- En $-\infty$ elle converge puisque la fonction est nulle.
- En $+\infty$:, soit $M \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_2^M xg(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^M x\frac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{2}\int_2^M \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\sqrt{2}\left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_2^M = -6\sqrt{2}\frac{1}{M^{1/2}} + 6\sqrt{2}\frac{1}{2^{1/2}} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 6 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge et U admet une espérance $E(U) = 6$.

5. a. La fonction de répartition H de V est définie par $H(x) = \mathbb{P}(V \leq x)$. Comme T_1, T_2, et T_3 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} H(x) &= P(T_1 \leqslant x) \times P(T_2 \leqslant x) \times P(T_3 \leqslant x) \\ &= F(x)^3 \end{aligned}$$

b. On a clairement que H est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sauf en 2. Une densité h de V est donnée par $h(x) = H'(x) = 3F^2(x)f(x)$.

c. Il faut étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x$ impropre en $\pm\infty$

- En $-\infty$ elle converge puisque la fonction est nulle.
- en $+\infty$, pour $M \geq 2$:

$$\int_2^M xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^M 3x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{2}}\int_2^M \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x^{1/2}}dx$$

Et comme $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}^2\right)\dfrac{1}{x^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{1/2}}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$, par comparaison d'intégrales à termes positifs, l'intégrale de $xh(x)$ diverge également et V n'a pas d'espérance.