Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5336

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + z - t = 0\right\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 tels que $F = \text{Vect}\ (u_1, u_2, u_3)$.
3. Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5336

1. **Le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ appartient à F :** en effet $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$ et on a bien $0 - 2 \times 0 + 0 - 0 = 0$.

   F est stable par combinaison linéaire : soient $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u = (x_1, y_1, z_1, t_1) & \in & F \\ v = (x_2, y_2, z_2, t_2) & \in & F \end{array}\right.$

   On considère $w = \lambda u + v$ où $w = (x_3, y_3, z_3, t_3)$.
   Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x_3 - 2y_3 + z_3 - t_3 = 0$.

   Par construction de w on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \\ t_3 & = & \lambda t_1 + t_2 \end{array}\right.$

   Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned} x_3 - 2y_3 + z_3 - t_3 &= \lambda x_1 + x_2 - 2(\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2 - (\lambda t_1 + t_2) \\ &= \lambda x_1 + x_2 - 2\lambda y_1 - 2y_2 + \lambda z_1 + z_2 - \lambda t_1 - t_2 \\ &= \lambda x_1 - 2\lambda y_1 + \lambda z_1 - \lambda t_1 + \underbrace{x_2 - 2y_2 + z_2 - t_2}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= \lambda \underbrace{(x_1 - 2y_1 + z_1 - t_1)}_{=0 \text{ car } u \in F} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $w \in F$ et donc $\lambda u + v \in F$.

   Par suite, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned} (u = (x, y, z, t) \in F) &\Leftrightarrow (x - 2y + z - t = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 2y - z + t) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2y & - & z & + & t \\ y & = & y & & & & \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right. ,\ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow \left(u = (2y - z + t, y, z, t),\ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\right) \\ &\Leftrightarrow (u \in \text{Vect}\ ((2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))) \end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $u_1 = (2, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0, 1)$, on a bien $F = \text{Vect}\ (u_1, u_2, u_3)$.

3. Étudions la liberté de $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.
   Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(\star) : \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système représentation matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Un échelonnement en lignes donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$
ce qui assure la liberté de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$.

EX. 2 | Réf. 5337

Dans tout ce qui suit, m désigne un réel quelconque.
On considère la famille $\mathcal{F}_m$ formée par les 4 vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous :

$$u_1 = (1, 1, m) \quad u_2 = (1, 1, 1+m) \quad u_3 = (m, m, 1) \quad u_4 = \big(m+1, m^2-1, m\big)$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m la famille $\mathcal{F}_m$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5337

Par définition, la famille $\mathcal{F}_m$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, pour tout $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(\star): \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_1 = u$$

ce qui signifie que le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & m+1 & a \\ 1 & 1 & m & m^2-1 & b \\ m & 1+m & 1 & m & c \end{array}\right)$ est compatible quelle que soit le triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.
Un échelonnement en lignes donne que :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & m+1 & a \\ 1 & 1 & m & m^2-1 & b \\ m & 1+m & 1 & m & c \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & m+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 & -a+b \\ 0 & 1 & 1-m^2 & -m^2 & -ma+c \end{array}\right)$$
$$\underset{L_2 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & m+1 & a \\ 0 & 1 & 1-m^2 & -m^2 & -ma+c \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 & -a+b \end{array}\right)$$

Cet échelonnement fait apparaître que :

le rang du système correspondant est égal à 3 si $m^2 - m - 2 \neq 0$ et le système est compatible car il ne présente pas d'équation de compatibilité.

le rang du système correspondant est égal à 2 si $m^2 - m - 2 = 0$ et le système présente une équation de compatibilité qui sera $0 = -a + b$ et donc que le système n'est pas compatible quelle que soit le triplet (a, b, c).

On en déduit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $m^2 - m - 2 \neq 0$ c'est à dire si, et seulement si $m \notin \{-1, 2\}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5338

On considère les deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^4$ définis ci-dessous :

$$F = \left\{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\right\} \quad G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + t = 0\right\}$$

et on désigne alors par H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini comme étant l'intersection de F et G, c'est à dire que $H = F \cap G$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer trois vecteurs g_1, g_2 et g_3 tels que $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$. Qu'en déduire pour G ?
3. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Démontrer que H est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5338

1. **Le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ appartient à F :** en effet $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$ et on a bien $0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

   F est stable par combinaison linéaire : soient $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u = (x_1, y_1, z_1, t_1) & \in & F \\ v = (x_2, y_2, z_2, t_2) & \in & F \end{array}\right.$

   On considère $w = \lambda u + v$ où $w = (x_3, y_3, z_3, t_3)$.
   Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x_3 + y_3 + z_3 + t_3 = 0$.

   Par construction de w on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \\ t_3 & = & \lambda t_1 + t_2 \end{array}\right.$

   Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{array}{rcl} x_3 + y_3 + z_3 + t_3 & = & \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 + \lambda t_1 + t_2 \\ & = & \lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \lambda t_1 + \underbrace{x_2 + y_2 + z_2 + t_2}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ & = & \lambda \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1 + t_1)}_{=0 \text{ car } u \in F} + 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

   Ainsi, $w \in F$ et donc $\lambda u + v \in F$.

   Par suite, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Par définition de G, on a :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x, y, z, t) \in G) & \Leftrightarrow & (x + t = 0) \\ & \Leftrightarrow & (x = -t) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array}\right., (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \\ & \Leftrightarrow & \left(u = (-t, y, z, t)\,,\ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\right) \\ & \Leftrightarrow & (u \in \mathrm{Vect}\,((-1, 0, 0, 1)\,, (0, 1, 0, 0)\,, (0, 0, 1, 0))) \end{array}$$

   Ainsi, en posant $g_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $g_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $g_3 = (0, 0, 1, 0)$, on a bien $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$.

   Puisque G est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs g_1, g_2 et g_3, par théorème, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. **Le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ appartient à H :** en effet, $\overrightarrow{0}$ appartient à F car F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et $\overrightarrow{0}$ appartient à G car G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Ainsi $\overrightarrow{0}$ appartient à F et à G c'est à dire $\overrightarrow{0} \in F \cap G$ ou encore $\overrightarrow{0} \in H \cap G$.

H **est stable par combinaison linéaire :** soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u & \in & H \\ v & \in & H \end{cases}$

On considère $w = \lambda u + v$.

Montrons que $w \in H$, c'est à dire que $w \in F$ et $w \in G$.

Puisque $u \in H$, on a $u \in F$. De même $v \in H$ donc $v \in F$. Ainsi, $\lambda u + v$ est une combinaison linéaire d'éléments de F qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc par stabilité de F par combinaison linéaire, $\lambda u + v \in F$.

Puisque $u \in H$, on a $u \in G$. De même $v \in H$ donc $v \in G$. Ainsi, $\lambda u + v$ est une combinaison linéaire d'éléments de G qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc par stabilité de G par combinaison linéaire, $\lambda u + v \in G$.

Ainsi, $w = \lambda u + v$ est appartient à F et à G, donc $\lambda u + v$ appartient à H.

Par suite, H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

4. Par définition de H, on a :

$$\begin{aligned}
(u = (x,y,z,t) \in H) \quad & \Leftrightarrow \quad (u \in F \text{ et } u \in G) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \qquad\qquad + t = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad - y - z \qquad = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \qquad\qquad + t = 0 \\ \quad - y - z \qquad = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \qquad\qquad + t = 0 \\ \qquad y + z \qquad = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & & - & t \\ y & = & -z & & \\ z & = & z & & \\ t & = & & & t \end{cases}, \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(u = (-t, -z, z, t)\,,\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(u \in \mathrm{Vect}\left((-1,0,0,1)\,,(0,-1,1,0)\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $H = \mathrm{Vect}\left((-1,0,0,1)\,,(0,-1,1,0)\right)$ et comme les deux vecteurs $(-1,0,0,1)$ et $(0,-1,1,0)$ ne sont pas colinéaires, H est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.