

Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0377

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel qu'au voisinage de 0 : $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{a}{x} + b + cx + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2134

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (x - y + 2z - 2t, z - t, x - y + z, x - y + z)$$

et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Écrire la matrice A de f dans \mathcal{B} .

La matrice A est-elle inversible? Que peut-on conclure pour f ?

2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et montrer qu'il est engendré par $u = (1, 1, 0, 0)$.

3. a. Déterminer un vecteur $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $f(v) = u$ et $b = 1$.

- b. Soit G l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $f(w) = w$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , et que G est le sous-espace vectoriel engendré par $w_1 = (0, 0, 1, 1)$.

- c. Déterminer un vecteur $z = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(z) = z + w_1$ et $c = 1$.

- d. Montrer que (u, v, w_1, z) est une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^4 et écrire la matrice T de f dans \mathcal{B}' .