

Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2353

On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application u définie par :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (1 - X)P' + 2P'' \end{cases}$$

Pour la suite, on désigne par $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$ et on note $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans \mathcal{B} .
3. Montrer que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B}' .
5. Déterminer une base du noyau et de l'image de u .

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2354

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère l'application linéaire f définie par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

et on désigne par $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans \mathcal{B} .
2. Montrer que $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer deux vecteurs a et b tels que $E_1 = \text{Vect}(a)$ et $N_{-1} = \text{Vect}(b, f(b))$.
4. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1}$?
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, f(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
6. Quelle est la matrice de f dans \mathcal{B}' ?
7. Quelle est la matrice de f^2 dans \mathcal{B}' ?