Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1530

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le rang est égal à 1.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et un vecteur ligne non nul $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$ tels que $A = CL$.
2. Démontrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ où $\operatorname{tr}(A)$ désigne la trace de A, c'est à dire la somme des coefficients diagonaux de A.
3. En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et $\operatorname{tr}(A)$.
4. **a.** Le réel 0 est-il valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé.
   b. Le réel $\operatorname{tr}(A)$ est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   On distinguera suivant que $\operatorname{tr}(A) = 0$ *ou non.*
5. Déduire des questions précédentes que :

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}(A) \neq 0$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5372

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **a.** Vérifier que f est une fonction paire.
   b. Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X sa fonction de répartition.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. On pose $Y = \ln(|X|)$.
   On admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on note F_Y sa fonction de répartition.
   a. Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(-\mathrm{e}^x)$.
   b. Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
   c. Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0; 1[$, et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.
   d. On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$, et reconnaître la loi de Z.