## Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 5329

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

### EX. 2 | Réf. 5330

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**1.** Exprimer en fonction de $x$ et de $n$ la somme $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

**2.** En déduire la valeur de $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 3 | Réf. 5331

On appelle ensemble des entiers de Gausse noté $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + \mathrm{i}\, b$ avec $a$ et $b$ dans $\mathbb{Z}$.

**1.** Soient $z$ et $z'$ deux entiers de Gauss. Démontrer que $z - z'$ et $zz'$ sont des entiers de Gauss.

**2.** Pour tout nombre complexe $z$, on note $N(z) = z \times \overline{z}$.

**a.** Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a $N(z)\,N(z') = N(zz')$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier de Gauss $z$, $N(z)$ est un entier naturel.

**c.** Soit $z$ un entier de Gauss non nul tel que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss. Montrer que $N(z) = 1$.

**d.** Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss.