Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2353

On désigne par $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application u définie par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (1-X)P' + 2P'' \end{array} \right.$$

Pour la suite, on désigne par $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$ et on note $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer une base du noyau et de l'image de u.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2353

1. Montrer le caractère linéaire de u en revenant à la définition, puis ne pas oublier que cela doit-être un endomorphisme...puisqu'il faudra discuter sur le degré de $u(P)$ permettra de montrer que $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. On calculera les images des vecteurs de la base canonique pour former la matrice demandée.
3. Utiliser la représentation matricielle de $\mathcal{B}'$ pour montrer que c'est une base ou remarquer que la famille $\mathcal{B}'$ possède une particularité bien arrangeante pour son caractère libre...
4. Les formules de passage pour les endomorphismes permettent d'obtenir la matrice demandée.
5. Exploiter les représentations matricielles de u pour identifier une base du noyau et de l'image de u.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 2354

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application linéaire f définie par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

et on désigne par $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \mathrm{Ker}\,\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer deux vecteurs a et b tels que $E_1 = \mathrm{Vect}\,(a)$ et $N_{-1} = \mathrm{Vect}\,(b, f(b))$.
4. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1}$?
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$?
7. Quelle est la matrice de f^2 dans $\mathcal{B}'$?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2354

- Une application linéaire est entièrement déterminer par l'image d'une base.
- Revenir à la définition de la matrice d'une application linéaire pour construire la matrice demandée.
- E_1 et N_{-1} sont des noyaux, donc des espaces vectoriels...à condition que ce soient des noyaux d'applications linéaires...
- Sinon, revenir à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
- Il s'agit de chercher une base de E_1 et N_{-1}.
- Revenir à la définition d'une somme directe.
- Soit on reveeint à la définition d'une base, soit on utilise les représentations matricielles, soit on utilise les sommes directes.
- On exploite les questions précédentes pour la matrice de f puis le fait que $f^2 = f \circ f$.