Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1530

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le rang est égal à 1.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et un vecteur ligne non nul $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$ tels que $A = CL$.
2. Démontrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A, c'est à dire la somme des coefficients diagonaux de A.
3. En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et $\mathrm{tr}(A)$.
4. **a.** Le réel 0 est-il valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé.
   b. Le réel $\mathrm{tr}(A)$ est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   On distinguera suivant que $\mathrm{tr}(A) = 0$ *ou non.*
5. Déduire des questions précédentes que :

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) \neq 0$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1530

1. Comme la matrice est de rang 1, toutes les colonnes sont proportionnelles à l'une d'entre elles...
2. Calculer A^2 avec la relation de la question précédente.
3. On en revient à la définition et en utilisant A^2.
4. **a.** Le théorème du rang donne la réponse...
   b. Discuter suivant la nullité de la trace.
5. On exploite les résultats des questions précédentes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5372

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **a.** Vérifier que f est une fonction paire.
   b. Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X sa fonction de répartition.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. On pose $Y = \ln(|X|)$.
On admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on note F_Y sa fonction de répartition.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^{x}) - F_X(-\mathrm{e}^{x})$.
   - **b.** Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
   - **c.** Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0;1[$, et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.
   - **d.** On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1-U)$, et reconnaître la loi de Z.