Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5329

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5329

- On utilisera la linéarité de la somme...
- puis un changement d'indices

EX. 2 | Réf. 5330

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Exprimer en fonction de x et de n la somme $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5330

1. On reconnaitra une somme usuelle.
2. On pourra remarquer que la dérivée de la fonction $x \longmapsto x^k$ est la fonction $x \longmapsto kx^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5331

On appelle ensemble des entiers de Gausse noté $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + \mathrm{i}\, b$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$.

1. Soient z et z' deux entiers de Gauss. Démontrer que $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.
2. Pour tout nombre complexe z, on note $N(z) = z \times \overline{z}$.
   - **a.** Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', on a $N(z)\, N(z') = N(zz')$.
   - **b.** Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z)$ est un entier naturel.
   - **c.** Soit z un entier de Gauss non nul tel que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss. Montrer que $N(z) = 1$.
   - **d.** Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5331

1. On fait les calculs explicitement et on discute sur la nature des parties réelles et imaginaires.
2. **a.** On fait les calculs explicitement dans le cas où $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ sont écrits sous forme algébrique avec a, a', b et b' réels quelconques.

b. On explicite $N(z)$ pour un entier de Gauss, et on discute de la nature des termes le définissant.

c. On mettra à profit les deux questions précédentes en remarquant que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.

d. Dans ce cas on sait que $N(z) = 1$ ce que donne une relation pour a et b lorsque $z = a + \mathrm{i}\, b$ entier de Gauss. Il restera à déterminer tous les couples (a, b) solution.