Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0377

Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel qu'au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{a}{x}+b+cx+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0377

On écrit $\mathrm{e}^x=1+x+\frac12x^2+\frac16x^3+\frac1{24}x^4+o\left(x^4\right)$ d'où $\mathrm{e}^x-1=x+\frac12x^2+\frac16x^3+\frac1{24}x^4+o\left(x^4\right)$, donc en factorisant par x, on obtient $\mathrm{e}^x-1=x\left(1+\frac12x+\frac16x^2+\frac1{24}x^3+o\left(x^3\right)\right)$ d'où :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac1x\times\frac{1}{1+\frac12x+\frac16x^2+\frac1{24}x^3+o\left(x^3\right)}$$

On fait le $DL_3\left(0\right)$ du second facteur pour obtenir :

$$\frac{1}{1+\frac12x+\frac16x^2+\frac1{24}x^3+o\left(x^3\right)}=1-\frac12x+\frac1{12}x^2+o(x^3)$$

d'où en multipliant par $\dfrac1x$:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac1x-\frac12+\frac{x}{12}+o(x^2)$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2184

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\forall\left(x,y,z,t\right)\in\mathbb{R}^4,\quad f\left(x,y,z,t\right)=\left(x-y+2z-2t,z-t,x-y+z,x-y+z\right)$$

et soit $\mathcal{B}=\left(e_1,\,\ldots,\,e_4\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Écrire la matrice A de f dans $\mathcal{B}$.
La matrice A est-elle inversible ? Que peut-on conclure pour f ?

2. Déterminer $\operatorname{Ker}\left(f\right)$ et montrer qu'il est engendré par $u=\left(1,1,0,0\right)$.

3. **a.** Déterminer un vecteur $v=\left(a,b,c,d\right)\in\mathbb{R}^4$ tel que : $f\left(v\right)=u$ et $b=1$.

b. Soit G l'ensemble des vecteurs $w\in\mathbb{R}^4$ vérifiant $f\left(w\right)=w$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et que G est le sous-espace vectoriel engendré par $w_1=\left(0,0,1,1\right)$.

c. Déterminer un vecteur $z=\left(a,b,c,d\right)\in\mathbb{R}^4$ tel que $f\left(z\right)=z+w_1$ et $c=1$.

d. Montrer que $\left(u,v,w_1,z\right)$ est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2184

1. Il s'agit ici de calculer $f\left(e_1\right)$, $f\left(e_2\right)$, $f\left(e_3\right)$ et $f\left(e_4\right)$, de les exprimer dans la base $\mathcal{B}$, et de les écrire en colonne pour obtenir la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
On a : $f\left(e_1\right)=\ldots=\left(1,0,1,1\right)$, $f\left(e_2\right)=\ldots=\left(-1,0,-1,-1\right)$ $f\left(e_3\right)=\left(2,1,1,1\right)$ $f\left(e_4\right)=\ldots=\left(-2,-1,0,0\right)$.

Par conséquent : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Plusieurs résultats permettent de conclure quant à l'inversibilité de la matrice A, notamment les deux suivants :

- les deux dernières lignes étant identiques, la réalisation sur cette matrice de l'algorithme d'inversion d'une matrice par Gauss conduira à une ligne avec un pivot nul.
- **ou** les deux premières colonnes sont proportionnelles, ce qui signifie que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ et ainsi que $\dim(\operatorname{Im}(A)) \leq 3$, ce qui donne $\operatorname{rg}(A) \leq 3$ et donc A non inversible.

Puisque A n'est pas inversible, f n'est pas bijective.

2. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors : $u \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$

Matriciellement, ce système se traduit par :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $u \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}((1, 1, 0, 0)).$

3. a. On cherche $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v) = u$ et $b = 1$. Si l'on traduit cela matriciellement, il s'agit de trouver a, b et c tels que : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui conduit au système : $\begin{cases} a + 2c - 2d = 2 \\ c - d = 1 \\ a + c = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$, que l'on résout matriciellement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en conclut que $a = 0$, $c = 1$ et $d = 0$. Par suite $v = (0, 1, 1, 0)$.

b. Soit $G = \{w \in \mathbb{R}^4,\ f(w) = w\}$.

- Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
  - ↪ le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ appartient à G puisque pour toute application linéaire, l'image du vecteur nul est le vecteur nul, donc $f(0) = 0$.
  - ↪ Soient w_1 et w_2 deux éléments de G, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^3$. Montrons que le vecteur $v = \lambda w_1 + w_2$ appartient à G, c'est à dire qu'il vérifie $f(v) = v$.

    On a alors : $$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda w_1 + w_2) \\ &= \lambda f(w_1) + f(w_2) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda w_1 + w_2 \quad \text{car } w_1 \in G \text{ et } w_2 \in G \\ &= v \end{aligned}$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- Pour $w=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on a : $\quad w\in G \quad\Leftrightarrow\quad f(w)=w$ qui se traduit matriciellement par $AW=W$ en notant W le vecteur colonne associé à w. Cela conduit donc au système d'inconnues a, b, c et d :

$$\left\{\begin{array}{l} a-b+2c-2d=a\\ c-d=b\\ a-b+c=c\\ a-b+c=d\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} -b+2c-2d=0\\ -b+c-d=0\\ a-b=0\\ a-b+c-d=0\end{array}\right. \quad \text{qui devient matriciellement :}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0&-1&2&-2&0\\ 0&-1&1&-1&0\\ 1&-1&0&0&0\\ 1&-1&1&-1&0\end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&-1&1&-1&0\\ 0&-1&2&-2&0\\ 1&-1&1&-1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&-1&1&-1&0\\ 0&-1&2&-2&0\\ 0&0&1&-1&0\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&-1&1&-1&0\\ 0&0&1&-10&\\ 0&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&-1&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftarrow -L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ainsi : $\quad w\in G \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ c=d\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad w\in \mathrm{Vect}\,((0,0,1,1)).$

c. Pour $z=(a,b,c,d)$ avec $c=1$, la relation $f(z)=z+w_1$ se traduit matriciellement par $AZ=Z+W_1$ en notant Z et W_1 les deux matrices colonnes associées à z et w_1, et cela conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{l} -b-2d=-2\\ -b-d=-1\\ a-b=1\\ a-b-d=0\end{array}\right. \quad \text{qui se traduit matriciellement par :}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0&-1&-2&-2\\ 0&-1&-1&-1\\ 1&-1&0&1\\ 1&-1&1&0\end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&1\\ 0&-1&-1&-1\\ 0&-1&-2&-2\\ 1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&1\\ 0&-1&-1&-1\\ 0&-1&-2&-2\\ 0&0&-1&-1\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&1\\ 0&-1&-1&-1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&1\\ 0&-1&-1&-1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&0\end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&0&1\\ 0&-1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&-1\end{array}\right)$$

qui conduira alors aux solutions $a=1$, $b=0$ et $d=1$.
Par suite, on en déduit que $z=(1,0,1,1)$.

d. On vérifie que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w_1, z)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ en montrant par exemple que cette dernière est libre en en cherchant par exemple son rang. La matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w_1, z)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On échelonne P pour en déterminer le nombre de pivots :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc de rang 4. Par suite, la famille $\mathcal{B}'$ qui est une famille de 4 vecteurs, est donc libre. Comme c'est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ qui est un espace de dimension 4, cette dernière est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Pour obtenir la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$, on peut :

- utiliser la formule de passage pour les endomorphismes, en remarquant notamment que la matrice P précédemment écrite est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}'$. Ainsi, on aura $T = P^{-1}AP$, où il restera à chercher P^{-1} qui vaut en $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, qui donnera alors $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- remarquer que $f(u) = 0$, $f(v) = u$, $f(w_1) = w_1$ et $f(z) = w_1 + z$ qui donnera directement T.