Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2353

On désigne par $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application u définie par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (1-X)P' + 2P'' \end{array} \right.$$

Pour la suite, on désigne par $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$ et on note $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer une base du noyau et de l'image de u.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2353

1. **Caractère linéaire de f :** $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ sont deux espaces vectoriels.
   Soiet $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $u\left(\lambda P + Q\right) = \lambda u\left(P\right) + u\left(Q\right)$.
   En posant $R = \lambda P + Q$, il vient que :
   $$\begin{array}{rcl} u(R) & = & P + (1-X)R' + 2R'' \\ & = & \lambda P + Q + (1-X)\left(\lambda P + Q\right)' + 2\left(\lambda P + Q\right)'' \\ & = & \lambda P + Q + (1-X)\left(\lambda P' + Q'\right) + 2\left(\lambda P'' + Q''\right) \\ & = & \lambda P + Q + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' + 2\lambda P'' + 2Q'' \\ & = & \lambda\left(P + (1-X)P' + 2P''\right) + Q + (1-X)Q' + 2Q'' \\ & = & \lambda u\left(P\right) + u\left(Q\right) \end{array}$$
   u est bien une application linéaire.

   Caractère endomorphisme de u : il reste à montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par opération sur les degrés des polynômes, il vient :
   $$\left\{ \begin{array}{l} \deg(P) \leq 2 \\ \deg(1-X) = 1 \quad \text{et} \quad \deg(P') \leq 1 \text{ donc } \deg\left((1-X)P'\right) \leq 2 \\ \deg(2) = 0 \quad \text{et} \quad \deg(P'') \leq 0 \text{ donc } \deg\left(2P''\right) \leq 0 \end{array} \right.$$
   et par somme $\deg\left(P + (1-X)P' + 2P''\right) \leq \max\left(\deg(P), \deg\left((1-X)P'\right), \deg(2P'')\right)$ ce qui donne $\deg(u(P)) \leq 2$ et ainsi $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Par conséquent $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$.
2. Un calcul direct donne que :
   $$\begin{array}{rcl} f\left(\tilde{1}\right) & = & \tilde{1} + (1-X)\tilde{1}' + 2\tilde{1}'' \\ & = & \tilde{1} + (1-X)\tilde{0} + 2\tilde{0} \\ & = & \tilde{1} \end{array}$$
   $$\begin{array}{rcl} f\left(X\right) & = & X + (1-X)\left(X\right)' + 2\left(X\right)'' \\ & = & X + (1-X)\tilde{1} + 2\tilde{0} \\ & = & X + 1 - X \\ & = & 1 \end{array}$$
   $$\begin{array}{rcl} f\left(X^2\right) & = & X^2 + (1-X)\left(X^2\right)' + 2\left(X^2\right)'' \\ & = & X^2 + (1-X) \times 2X + 2 \times 2 \\ & = & X^2 + 2X - 2X^2 + 4 \\ & = & 4 + 2X - X^2 \end{array}$$
   On en déduit donc que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de degrés échelonnés. C'est donc par théorème, une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   C'est donc une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, elle est donc aussi une base de ce dernier.
4. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et B la matrice de u dans $\mathcal{B}'$, on sait que $B = P^{-1}AP$.
   Or ici $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on trouverait que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et il vient alors que : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
5. **Base de** $\operatorname{Ker}(u)$ **:** Il est immédiat que $\operatorname{rg}(B) = 2$, et par suite, d'après le théorème du rang que $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$.
   D'après l'expression de B, on remarque que $f(P_1) = 0$. Par suite, $P_1 \in \operatorname{Ker}(u)$ et comme $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$, on en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(P_1)$.

   Base de $\operatorname{Im}(u)$ **:** Puisque $\operatorname{rg}(B) = 2$, il vient que $\operatorname{rg}(f) = 2$ c'est à dire que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$.
   D'après l'expression de A, les vecteurs $f(X)$ et $f(X^2)$ sont clairement non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de $\operatorname{Im}(f)$. Or $\operatorname{Im}(f)$ étant de dimension 2, la famille $(f(X), f(X^2))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.
   Il vient donc que : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(\tilde{1}, 4 + 2X - X^2)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2354

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application linéaire f définie par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

et on désigne par $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer deux vecteurs a et b tels que $E_1 = \operatorname{Vect}(a)$ et $N_{-1} = \operatorname{Vect}(b, f(b))$.
4. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1}$?
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, f(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$?
7. Quelle est la matrice de f^2 dans $\mathcal{B}'$?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2354

1. f est donnée par l'image de la base canonique. Ainsi il vient directement $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
2. L'application f étant supposée linéaire, et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'étant aussi, par combinaison linéaire d'applications linéaires, on sait que $f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire. Par conséquent $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est un sous-espaec vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Sur le même principe, on montrerait que N_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ comme noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. • En notant X la représentation matricielle d'un vecteur x, il vient : $x \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (M - \mathrm{I}_3)X = 0$. Il s'agit donc de résoudre le système homogène de matrice $M - \mathrm{I}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 \\ 3 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant x_1, x_2, x_3 les inconnues du système, on en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \end{array}\right.$

Par conséquent $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit donc que $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- La matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M^2. Ainsi, il vient : $\quad x \in N_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(M^2 + \mathrm{I}_3\right) X = 0$.
  Il s'agit donc de résoudre le système homogène de matrice $M^2 - \mathrm{I}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 1 pivot non nul. Le rang du système est donc 1.
Les équations de compatibilité de ce système sont :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & 0 & \quad \text{Relation vérifiée} \\ 0 & = & 0 & \quad \text{Relation vérifiée} \end{array}\right.$$

Le système est compatible et on poursuit l'échelonnement.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant x_1, x_2, x_3 les inconnues du système, on en déduit les relations : $\left\{ x_1 = x_2 - x_3 \quad (\star)\right.$

Par suite, il vient : $\quad x \in N_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $N_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que N_{-1} est de dimension 2.

De plus, on a $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ qui vérifie bien la relation $(\star)$ obtenue plus haut pour caractériser les éléments de N_{-1} et qui est donc dans N_{-1} en étant non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien $N_{-1} = \mathrm{Vect}\,(b, f(b))$.

4. Soit $x \in E_1 \cap N_{-1}$. Alors puisque $x \in E_1$, on a $f(x) = x$, et donc en composant par f il vient $f(f(x)) = f(x) = x$. Or $x \in N_1 - 1$, donc on a $f(f(x)) = -f(x) = -x$. Ainsi, $x = -x$ et donc $x = 0$, d'où l'inclusion $E_1 \cap N_{-1} \subset \{0\}$, l'autre inclusion étant évidente comme intersection de deux sous-espaces vectoriels.

5. On commence par étudier la liberté de la famille $\mathcal{B}'$ à l'aide sa représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ dont on cherche le rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3, et la famille $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3. Elle est donc libre. C'est de plus une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

6. On sait déjà que $f(a) = a$, et $f(b) = f(b)$. Or on a aussi $f(f(b)) = -b$ d'après la question précédente. Il vient alors que $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. On a directement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f^2\right) = M'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$