Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1530

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le rang est égal à 1.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et un vecteur ligne non nul $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$ tels que $A = CL$.

2. Démontrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A, c'est à dire la somme des coefficients diagonaux de A.

3. En déduire que les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et $\mathrm{tr}(A)$.

4. **a.** Le réel 0 est-il valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé.

b. Le réel $\mathrm{tr}(A)$ est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
On distinguera suivant que $\mathrm{tr}(A) = 0$ *ou non.*

5. Déduire des questions précédentes que :

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) \neq 0$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1530

1. La matrice A est de rang 1 donc toutes ses colonnes sont proportionnelles à une même colonne C non nulle. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une telle colonne, la matrice A est donc de la forme : $A = \begin{pmatrix} \ell_1 C & \ell_2 C & \dots & \ell_n C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 & \ell_2 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \ell_1 c_2 & \ell_2 c_2 & \dots & \ell_n c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_1 c_n & \ell_2 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix}$ où $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ donc des réels non tous nuls car sinon le rang de A serait nul. On obtient le résultat souhaité en posant $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$.

2. En utilisant la question précédente, on trouve : $A^2 = CLCL = C\,(LC)\,L = C\,(\ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \ldots + \ell_n c_n)\,L$. La somme entre parenthèses n'est autre que la somme des coefficients diagonaux de A à savoir la trace de A, $\mathrm{tr}\,(A)$. On a donc bien $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)CL = \mathrm{tr}\,(A)A$.

3. Soit λ une valeur propre de la matrice A. Par définition, il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. On en déduit alors que $A^2X = \lambda^2 X$. En multipliant à droite alors l'égalié de la question précédente, par X, on obtient $A^2X = \mathrm{tr}\,(A)AX$ ou encore $\lambda^2 X = \mathrm{tr}\,(A)\lambda X$, donc $\left(\lambda^2 \mathrm{tr}\,(A)\lambda\right) X = 0$, et comme X est un vecteur non nul, on en déduit que $\lambda\,(\lambda - \mathrm{tr}\,(A)) = 0$, et finalement $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \mathrm{tr}\,(A)\}$.

4. **a.** Désignons par f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Puisque $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,(f) = 1$, le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = n - 1 > 0$, ainsi 0 est valeur propre de f et son sous-espace propre associé à la pour dimension $n - 1$.
Ainsi $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

b.
- Si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$, alors d'après la question précédente, $\mathrm{tr}\,(A)$ est valeur propre et son sous-espace associé a pour dimension $n - 1$.
- Si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$, on constate que $AC = CLC = C(LC) = C\,(\ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \ldots + \ell_n c_n) = \mathrm{tr}\,(A)C$. Puisque $C \neq 0$, le rééel $\mathrm{tr}\,(A)$ est donc une valeur propre de A. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n, on a $\underbrace{\dim(E_0(A))}_{=n-1} + \dim\left(E_{\mathrm{tr}\,(A)}(A)\right) \leq n$.

Puisque $E_{\operatorname{tr}(A)}(A)$ n'est pas réduit au vecteur nul, on déduit que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A) = 1$.

5. Comme dans la question précédente :
- Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, la matrice A possède une unique valeur propre, à savoir 0, et comme $\dim(E_0(A)) = n-1 < n$, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.
- Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, la matrice A possède 0 et $\operatorname{tr}(A)$ pour valeur propre, et comme $\dim(E_0(A)) + \dim\left(E_{\operatorname{tr}(A)}(A)\right) = n-1+1 = n$, on en déduit que la matrice A est diagonalisable.

D'où l'équivalence recherchée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5372

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **a.** Vérifier que f est une fonction paire.

b. Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X sa fonction de répartition.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. On pose $Y = \ln(|X|)$.

On admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on note F_Y sa fonction de répartition.

a. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\quad F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^{x}) - F_X(-\mathrm{e}^{x})$.

b. Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

c. Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0;1[$, et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.

d. On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1-U)$, et reconnaître la loi de Z.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5372

1. **a.** Si $x \in]-1;1[$, puisque $f(x) = 0$, on a clairement $f(-x) = f(x)$.

Pour tout $x \in]-\infty;0] \cup [0;+\infty[$ (qui est symétrique par rapport à l'origine), du fait que $x \longmapsto x^2$ est paire, on en déduit que $f(-x) = f(x)$. Par suite f est paire.

b. f est clairement positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pour tout $A \geq 1$, on a $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2x}\right]_0^A = -\frac{1}{2A} + \frac{1}{2} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et par suite $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. Comme f est paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Donc f est bien une densité.

2. Pour tout $x \geq 1$, on a $xf(x) = \dfrac{1}{2x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge. Par suite, X n'a pas d'espérance.

3. **a.** Pour tout x, $F_Y(x) = \mathbb{P}(\ln(|X|) \leq x) = \mathbb{P}(-\mathrm{e}^{-x} \leq X \leq \mathrm{e}^{x})$ d'où le résultat.

b. Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R} \setminus -1, 1$. Don F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$en x tel que $\mathrm{e}^{x} \neq \pm 1$, et $-\mathrm{e}^{x} \neq \pm 1$ par le théorème de composition, donc sur $\mathbb{R}^*$, et ainsi Y est à densité.

Une densité est alors $g(x) = F_Y'(x)$ là où F_Y est $\mathcal{C}^1$.

Ainsi, $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(f(\mathrm{e}^{x}) + f(\mathrm{e}^{-x})\right)$, ce qui donne :
- Si $x < 0$, $\mathrm{e}^{x} \in]-1;1[$ et e^{-x} aussi, donc $g(x) = 0$.
- Si $x > 0$, $\mathrm{e}^{x} > 1$ et $\mathrm{e}^{-x} < -1$, donc $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

FInalement, on reconnaît que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

c. Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et $0 < \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ donc $0 \leq 1-\mathrm{e}^{-x} < 1$ et $1-\mathrm{e}^{-x} \in [0;1[$.
Si $x < 0$, alors $-x > 0$, donc $\mathrm{e}^{-x} > 1$ et finalement $1-\mathrm{e}^{-x} < 0$.

d. On note F_Z la fonction de répartition de Z. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $[Z \leq x] = [U \leq 1-\mathrm{e}^{-x}]$.
Donc $F_Z(x) = F_U\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$ et comme précédemment, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$en x tel que $1-\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ et 1, donc pour $x \neq 0$.
Donc Z est bien à densité, et une densité est $k(x) = \mathrm{e}^{-x} h\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$ avec h densité de U.
Donc si $x \geq 0$, alors $1-\mathrm{e}^{-x} \in [0;1[$ et $h\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) = 1$ donc $k(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Si $x < 0$, alors $1-\mathrm{e}^{-x} < 0$, donc $h\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$ et $g(x) = 0$.
Ainsi Z suit aussi la loi exponentielle de paramètre 1.