Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5329

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5329

Par linéarité de la somme, il vient que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}\\ &\underset{\substack{j=n+1-k\\ \text{dans la 2e somme}}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\\ &= 0\end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 5330

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1. Exprimer en fonction de x et de n la somme $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$.

2. En déduire la valeur de $T_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^k$.

3. Que se passe-t-il si $x=1$? Que valent dans ce cas $S_n(1)$ et $T_n(1)$?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5330

1. Puisque $x \neq 1$, on a : $S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. La fonction $S_n : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme de degré au plus n.

Il vient alors que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ S_n'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$

On remarque alors que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ xS_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\ . = \sum_{k=1}^{n}kx^k = \sum_{k=0}^{n}kx^k = T_n(x)$$

Par ailleurs, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ S_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Ainsi, par dérivation d'un quotient, on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\, S_n'(x) & = & \dfrac{-(n+1)x^n \times (1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)\times(-1)}{(1-x)^2} \\ & = & \dfrac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ & = & \dfrac{1 + nx^{n+1}n - (n+1)x^{n+1}}{1-x} \end{array}$$

pour obtenir ainsi que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\, T_n(x) = \dfrac{x\left(1+nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}\right)}{1-x}$

3. Par définition $S_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$ ce qui donne $S_n(1) = n+1$.

Sur le même principe $T_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ ce qui donne $T_n(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 5331

On appelle ensemble des entiers de Gausse noté $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + \mathrm{i}\, b$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$.

1. Soient z et z' deux entiers de Gauss. Démontrer que $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

2. Pour tout nombre complexe z, on note $N(z) = z \times \overline{z}$.

a. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', on a $N(z)\,N(z') = N(zz')$.

b. Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z)$ est un entier naturel.

c. Soit z un entier de Gauss non nul tel que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss. Montrer que $N(z) = 1$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5331

1. En notant $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ avec $(a,b,a',b') \in \mathbb{Z}^4$, un calcul direct donne que :

$$z - z' = \underbrace{a-a'}_{\substack{\in\mathbb{Z} \\ \textbf{car } (a,a')\in\mathbb{Z}^2}} + \mathrm{i}\ \underbrace{(b-b')}_{\substack{\in\mathbb{Z} \\ \textbf{car } (b,b')\in\mathbb{Z}^2}} \quad \text{et } zz' = \underbrace{(aa'-bb')}_{\substack{\in\mathbb{Z} \\ \textbf{car } (a,b,a',b')\in\mathbb{Z}^4}} + \mathrm{i}\ \underbrace{(ab'+a'b)}_{\substack{\in\mathbb{Z} \\ \textbf{car } (a,b,a',b')\in\mathbb{Z}^2}}$$

puisque le produit de deux entiers est un entier, et la somme de deux entiers est un entier.
Ainsi, $z - z'$ et zz' sont deux entiers de Gauss.

2. a. En notant $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ avec $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ deux complexes quelconques mis sous forme algébrique, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} zz' & = & (aa'-bb') + \mathrm{i}\,(ab'-a'b) \\ \text{et ainsi : } \overline{zz'} & = & (aa'-bb') - \mathrm{i}\,(ab'-a'b) \\ \text{puis } zz' \times \overline{zz'} & = & (aa'-bb')^2 + (ab'-a'b)^2 \\ & = & a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a^2b'^2 - 2aa'bb' + a'^2 + b^2 \\ & = & a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2 + b^2 \end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rcl} z \times \overline{z} & = & a^2 + b^2 \\ z' \times \overline{z'} & = & a'^2 + b'^2 \\ \text{et donc : } N(z)\,N(z') & = & \left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right) \\ & = & a^2a'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + b^2b'^2 \end{array}$$

ce qui assure donc que $N(zz') = N(Z) \times N(z')$.

b. En notant $z = a + \mathrm{i}\, b$ avec $, a, b \in \mathbb{Z}^2$ un entier de Gauss quelconque, d'après ce qui précède :

$$N(z) = \underbrace{a^2 + b^2}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \textbf{car } (a,b) \in \mathbb{Z}^2}}$$

c. D'après ce qui précède, $N\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = N(z) \times N\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Or $N\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = N(1)$ et on a clairement que $N(1) = 1$.

Il vient donc que : $\underbrace{N(z)}_{\substack{\in \mathbb{N} \\ \textbf{car } z \in \mathbb{Z}[i]}} \times \underbrace{N\left(\dfrac{1}{z}\right)}_{\substack{\in \mathbb{N} \\ \textbf{car } \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[i]}} = 1.$

Il s'agit donc d'un produit d'entier qui vaut 1, ce qui n'est possible que si les deux facteurs sont égaux à ± 1. Ainsi, $N(Z) = \pm 1$, et comme il est clair que $N(z) \geq 0$ compte-tenu de l'expression précédemment trouvée dans un cadre plus général, il vient que $N(z)$.

d. Soient $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. D'après ce qui précède $N(z) = 1$ et donc $a^2 + b^2 = 1$. Comme a^2 et b^2 sont deux entiers naturels de somme égale à 1, on a nécessairement que $(a, b) \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,1)\}$ ce qui correspond aux complexes ± 1 et $\pm \mathrm{i}$.

La réciproque est immédiate dans le sens où ± 1 et $\pm \mathrm{i}$ sont des entiers de Gauss.

Ainsi l'ensemble cherché est $\{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.