Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4093

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. f est-il un automorphisme ?

EX. 2 | Réf. 2353

On désigne par $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application u définie par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (1-X)P' + 2P'' \end{array} \right.$$

Pour la suite, on désigne par $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$ et on note $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer une base du noyau et de l'image de u.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4498

On note $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$ et on considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $T(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on notera $T(A)$ l'élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $T(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ où $A^0 = \mathrm{I}_3$.

Ainsi, on désignera par $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $P(A) = A^3 + A^2 - A - \mathrm{I}_3$.

1. Factoriser le polynôme P et montrer que $P(A) = (0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4099

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\left(x_0, u(x_0), u^2(x_0)\right)$ forme une famille libre.
2. Justifier que la famille $\mathcal{B} = \left(u^2(x_0), u(x_0), x_0\right)$ est une base de E.
   Quelle est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$? En déduire une base du noyau et l'image de u.

3. Montrer alors que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4075

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Pour tout réel a différent de 1, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par : $\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a n'est pas inversible.

2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme.

3. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

4. Calculer $f_a(e'_1)$, $f_a(e'_2)$ et $f_a(e'_3)$.

5. En déduire la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$.

EX. 6 | Réf. 4081

On note $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On pose de plus $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par $F = \text{Vect}\,(A, B)$.
Montrer que $\mathcal{D}$ et F sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.