Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4683

On considère l'application Φ définie par : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = AM - MA \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base du noyau et de l'image de Φ.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4683

1. On pourra poser $R = \lambda M + N$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et montrer que $\Phi(R) = \lambda\Phi(M) + \Phi(N)$ pour obtenir le caractère linéaire de Φ.

2. Une base du noyau de Φ s'obtient en résolvant l'équation $\Phi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et une famille génératrice de l'image est $(\Phi(E_{11}), \Phi(E_{12}), \Phi(E_{21}), \Phi(E_{22}))$ dont il suffira d'extraire une famille libre. On pourra aussi expliciter $\Phi(M)$ pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4684

On désigne par $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1) \end{cases}$.

Soit alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x - z, 2x + 3y + 2z, -x + 3z) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{u_3} = (1,0,-1) \end{cases}$ et $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$.

a. Exprimer la matrice P de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

b. Montrer que la matrice P est inversible, et en déterminer son inverse.

c. En déduire que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer alors la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

4. f est-il un automorphisme ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4684

1. On calculera les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et on mettra en forme la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

2. a. Il s'agit simplement d'expliciter $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ dans la base canonique et d'exprimer cela sous forme matricielle.

b. On commencera par une recherche de rang pour justifier l'inversibilité de P, puis on procèdera au calcul de son inverse à l'aide d'un échelonnement en lignes de la matrice échelonnée $(P|\mathrm{I}_3)$.

c. On dispose d'un théorème qui lie le caractère base d'une famille et la notion de rang d'une famille.

3. On utilisera la formule de changement de base pour les endomorphismes, qui est ici... $B = P^{-1}AP$.

4. Le caractère bijectif de f peut s'obtenir par la recherche de son rang, qui est celui de l'une de ses représentations matricielles.