## Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 3740

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont on note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $2XP - \left(X^2-1\right)P' \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2XP - \left(X^2-1\right)P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $P = aX^2 + bX + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter $f(P)$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
4. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. L'endomorphisme $f$ est-il un automorphisme ?

### EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3740

1. Il suffit de discuter proprement sur les degrés des différents polynômes qui interviennent en utilisant les résultats opératoires sur les degrés de polynômes.
2. Être un endomorphisme, c'est être linéaire et...
3. Il suffit de mener le calcul de $f(P)$ et de réordonner les termes suivant les puissances croissantes de $X$.
4. On peut se servir du résultat de la question précédente pour calculer les images de $1$, $X$, et $X^2$ en remarquant par exemple que $1 = 1 + 0X + 0X^2$.
5. Le théorème du rang lie les dimensions de ces deux sous-espaces. Cependant, il faut au moins trouver une base de l'un des deux avant...
6. Quelle est la différence entre un automorphisme et un endomorphisme ? Comment le voir à l'aide par exemple de sa représentation matricielle ?

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 3741

On note $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On note alors $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$.
2. Montrer que la famille $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
5. Soit alors $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & A \times M \end{array} \right.$ .

**a.** Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

**b.** Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$.

**c.** En déduire que $f \circ f \circ f = 2f$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3741

1. RAS
2. Revenir à la définition de ce qu'est une famille libre pour établir le résultat semble le plus simple, d'autant que cela conduira à un système qui se résout très facilement.
3. Il y a trois points à vérifier. . .n'en oublier aucun !
4. **a.** Être un endomorphisme c'est être linéaire et. . .

   **b.** On calcule les images par $f$ de la base $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ que l'on exprime encore dans cette même base.

   **c.** La composition d'applications linéaires se traduit par un produit matriciel. . .

## Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3742

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'injectivité de $f$ suivant $m$.
2. Dans tous les cas, donner le rang de $f$, une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3742

1. Comme $f$ est un endomorphisme en dimension fini, son caractère injectif est équivalent à son caractère bijectif qui lui même est équivalent au caractère inversible de sa représentation matricielle.
2. On poursuit ici simplement les discussions engagées dans la question précédente.

EX. 4 | Réf. 3744

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit les deux fonctions $\mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}$ appelées respectives cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch} : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

On note alors $H = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$ et $F = \{f \in H,\ f(\ln(2)) = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de $H$.
2. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $H$.
3. Déterminer une base et la dimension de $F$.
4. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto & (f(-\ln(2)), f(\ln(2))) \end{array} \right.$. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3744

1. Il semblerait que $H$ en fait soit engendré par les deux fonctions $x \longleftarrow \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Reste à prouver que ces deux fonctions forment une famille libre de $H$.
2. Il y a plusieurs points à vérifier. . .on évite d'en oublier un !
3. $f \in H$ signifie que $f = \alpha\mathrm{ch}\, + \beta\mathrm{sh}$ avec $f(\ln(2)) = 0$ ce qui donne une condition sur $\alpha$ et $\beta$ que l'on exploite

ensuite.

**4.** On s'intéresse au caractère linéaire dans un premier temps. On obtiendra le caractère bijectif en utilisant les théorèmes propres à la dimension finie en précisant cependant bien les espaces dans lesquels on travaille.

## EX. 5 | Réf. 3743

Dans tout cet exercice, $m$ désigne un réel et on note $A(m)$ la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

On désignera par $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A(m)$.

On note par ailleurs $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.** On suppose dans cette question que $m = 1$.

- **a.** Déterminer une base du noyau et de l'image de $f$.
- **b.** Calculer, pour tout $n$ entier naturel non nul $(A(1))^n$.

**2.** Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m \neq 1$.

- **a.** Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.
- **b.** Déterminer deux réels $a$ et $b$ dépendants de $m$ tels que l'on ait $(A(m))^2 = aA(m) + b\mathrm{I}_3$.
- **c.** En déduire une expression de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de $\mathrm{I}_3$, puis expliciter les coefficients de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $m$.

**3.** On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer $J^2$.
- **b.** En déduire $J^k$ en fonction de $J$ et de $k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- **c.** Exprimer $A(m)$ en fonction de $\mathrm{I}_3$, $J$ et $m$.
- **d.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\quad (A(m))^n = \mathrm{I}_3 + (1 - (1-m)^n)\, J$.

## EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3743

**1.**
- **a.** On remplace $m$ par 1, et on utilise les méthodes usuelles pour déterminer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire donnée par sa matrice.
- **b.** On calcule $A(1)^2$ et $A(1)^3$ pour conjecturer la forme de $(A(m))^n$ que l'on établit alors par récurrence.

**2.**
- **a.** $A(m)$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls...
- **b.** On calcule $(A(m))^2$ que l'on décompose à l'aide de $A(m)$ et $\mathrm{I}_3$.
- **c.** On dispose d'un polynôme de la matrice $A(m)$ qu'il suffit d'exploiter après une factorisation pour avoir l'expression de $(A(m))^{-1}$.
- **d.** On exploite simplement la relation précédente.

**3.**
- **a.** RAS
- **b.** On calcule $J^3$ pour voir que...
- **c.** RAS
- **d.** On peut toujours exploiter le binôme de Newton ici.