À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4093] | 1| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. f est-il un automorphisme ?

Pistes de réflexion

- On commencera par s'assurer que l'on a bien affaire à une application linéaire (donc un endomorphisme).
- Pour s'intéresser à son caractère bijectif, on pourra par exemple mobiliser le théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie dans sa version matricielle.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4289] | 2| Suite linéaire et représentation matricielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

Pour la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

(1). Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
En déduire l'expression de U_n en fonction de A et U_0.

(2). On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
Qu'en déduire pour P ?

(3). Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.

(4). Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

(5). Donner alors en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). Il est facile de voir que la matrice A et déjà de cette forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$. Le reste doit nous faire penser à un processus type suite géométrique.

(2). Puisque l'on obtient l'identité on en conclut que $P^{-1} = \ldots$.

(3). Il suffit de réaliser le produit matriciel demandé.

(4). On commencera par justifier que $A = PDP^{-1}$. On sait ensuite qu'il s'agit d'un raisonnement par récurrence. . . où l'on exploitera la relation $U_{n+1} = AU_n$ pour établir l'hérédité.

(5). On connaît l'expression de A^n et il nous suffit de réaliser un seul calcul dans le produit matriciel $A^n X_0$ pour obtenir u_n.