Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2440

Montrer que le nombre $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$ est un entier naturel que l'on déterminera.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2440

On a directement :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2 &= \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2-2\sqrt{7-2\sqrt{6}}\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2\\
&= 7-2\sqrt{6}-2\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)}+7+2\sqrt{6}\\
&= 14-2\sqrt{7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}\\
&= 14-2\sqrt{49-4\times 6}\\
&= 14-2\sqrt{25}\\
&= 14-2\times 5\\
&= 4
\end{aligned}$$

et par conséquent on obtient bien un entier naturel.

EX. 2 | Réf. 2438

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose : $A_n=\dfrac{\left(9^{n+1}-9^n\right)^2}{\left(3^{n+1}-3^n\right)^2}$.

1. Calculer A_0 et A_1. Que peut-on remarquer ?
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1}=9A_n$.
3. Exprimer A_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2438

1. On a directement :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\left(9^{0+1}-9^0\right)^2}{\left(3^{0+1}-3^0\right)^2}\\
&= \frac{(9-1)^2}{\left(3^1-1\right)^2}\\
&= \frac{8^2}{2^2}\\
&= \left(\frac{8}{2}\right)^2\\
&= 4^2\\
&= 16
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left(9^{1+1}-9^1\right)^2}{\left(3^{1+1}-3^1\right)^2}\\
&= \frac{(81-9)^2}{(9-3)^2}\\
&= \frac{72^2}{6^2}\\
&= \left(\frac{72}{6}\right)^2\\
&= 12^2\\
&= 144
\end{aligned}$$

et on remarque alors que $A_1=9\times A_0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{\left(9^{(n+1)+1} - 9^{n+1}\right)^2}{\left(3^{(n+1)+1} - 3^{n+1}\right)^2} \\ &= \frac{\left(9^{n+2} - 9^{n+1}\right)^2}{\left(3^{n+2} - 3^{n+1}\right)^2} \\ &= \frac{\left(9\left(9^{n+1} - 9^{n}\right)\right)^2}{\left(3\left(3^{n+1} - 3^{n}\right)\right)^2} \\ &= \frac{9^2}{3^2}\frac{\left(9^{n+1} - 9^{n}\right)^2}{\left(3^{n+1} - 3^{n}\right)^2} \\ &= \left(\frac{9}{3}\right)^2 A_n \\ &= 3^2 A_n \\ &= 9A_n \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\left(9^{n+1} - 9^{n}\right)^2}{\left(3^{n+1} - 3^{n}\right)^2} \\ &= \frac{\left(9^{n}(9-1)\right)^2}{\left(3^{n}(3-1)\right)^2} \\ &= \frac{\left(9^{n} \times 8\right)^2}{\left(3^{n} \times 2\right)^2} \\ &= \frac{9^{2n} \times 8^2}{3^{2n} \times 2^2} \\ &= \frac{9^{2n}}{3^{2n}} \times \frac{8^2}{2^2} \\ &= \left(\frac{9}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \\ &= 3^{2n} \times 4^2 \\ &= 16 \times 3^{2n} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2266

Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ s'appliquent au point A et ont pour intensité $F_1 = 5$ N et $F_2 = 3$ N.

Déterminer l'intensité R de la résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ de ces deux forces.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2266

On utilise la relation : $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 + 2\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan.

En posant ici $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{F_2}$, on a donc : $\left\|\overrightarrow{R}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{F_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{F_2}\right\|^2 + 2\overrightarrow{F_1}\,.\,\overrightarrow{F_2}$.

Par ailleurs : $\overrightarrow{F_1}\,.\,\overrightarrow{F_2} = \left\|\overrightarrow{F_1}\right\| \times \left\|\overrightarrow{F_2}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$.

Ce qui donne ici : $\overrightarrow{F_1}\,.\,\overrightarrow{F_2} = 5 \times 3 \times \cos(50°) = 15 \times \cos(50°)$.

Finalement on en déduit que :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{R}\right\|^2 &= 5^2 + 3^3 + 2 \times 15 \times \cos(50°)\ . \\ &= 25 + 9 + 30\cos(50°) \\ &= 34 + 30\cos(50°) \end{aligned}$$

Par suite, il vient : $\left\|\overrightarrow{R}\right\| = \sqrt{34 + 15\cos(50°)} \approx 7,3$, et donc l'intensité R de la résultante $\overrightarrow{R}$ est approximativement de $7,3$ N.

EX. 4 | Réf. 2359

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base de

vecteurs du plan associée. Les coordonnées des points et vecteurs sont données respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}$.
Soient $A(2,-3)$ et $B(5,4)$ deux points du plan.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

3. Calculer la distance du point $C(-4,5)$ à la droite (AB).

4. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne : $\quad \mathcal{D}: \quad 3x+7y-23=0.$

- **a.** Le point C appartient-il à $\mathcal{D}$?
- **b.** Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont perpendiculaires.
- **c.** Que représente pour C le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et (AB) ?

5. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 2359

1. On a : $\quad (AB)=\mathcal{D}\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$. Or ici $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ et ainsi, une représentation paramétrique de (AB) est : $\quad (AB)$: $\left\{\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=-3+7t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

2. Puisque $(AB)=\mathcal{D}\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$ et que $M(x,y)$ quelconque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$, il vient que :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in(AB) \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y+3 & 7 \end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad 7x-3y-23=0 \end{aligned}$$

3. La distance du point C à (AB) est donnée par : $\quad d(C,(AB))=\dfrac{|7\times(-4)-3\times5-23|}{\sqrt{7^2+(-3)^2}}$ ce qui donnera $d(C,(AB))=\dfrac{66}{\sqrt{58}}$ ou encore $\boxed{d(C,(AB))=\dfrac{33\sqrt{58}}{29}}$.

4. **a.** On a : $\quad C\in\mathcal{D} \quad\Leftrightarrow\quad 3\times(-4)+7\times5-23=0$
Or $3\times(-4)+7\times5-23=-12+15-23\neq0$ et ainsi $C\in\mathcal{D}$.

b. Les deux équations cartésiennes de (AB) et $\mathcal{D}$ permettent de dire que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ sont respectivement des vecteurs normaux de (AB) et $\mathcal{D}$.
Or $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=7\times3+(-3)\times7=0$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux, et par suite, que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

c. Le point d'intersection entre (AB) et $\mathcal{D}$ est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

5. En notant $H(x,y)$ le projeté orthogonal de C sur (AB), les coordonnées de H sont solutions du système d'équation $\mathcal{S}:\left\{\begin{array}{l}7x-3y-23=0\\3x+7y-23=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{S}:\left\{\begin{array}{l}7x-3y=23\\3x+7y=23\end{array}\right..$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \mathcal{S} \quad &\underset{L_2\leftarrow 7L_2-3L_1}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l}7x-3y=23\\58y=92\end{array}\right. \\ &\underset{L_1\leftarrow 58L_1+3L_2}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l}406x=1610\\58y=92\end{array}\right. \\ &\underset{\substack{L_1\leftarrow \frac{1}{406}L_1\\ L_2\leftarrow\frac{1}{58}L_2}}{\Leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1610}{58}\\ y=\dfrac{92}{58}\end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi $H\left(\dfrac{115}{29},\dfrac{46}{29}\right)$.