Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2358

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base orthonormée de vecteurs associée.

1. **a.** Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ forment une base de vecteurs du plan notée $\mathcal{B}'$.

   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Soit $A\,(3,2)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}' = \left(O\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$?

3. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(\Omega\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ où $\Omega\,(-1,2)$?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2358

1. **a.** Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant non colinéaires puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ces deux vecteurs forment une base de vecteurs du plan. Par ailleurs, on a : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 2\times 6 + 3\times(-4) = 12 - 12 = 0$ et donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Par conséquent $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est bien une base orthogonale de vecteurs du plan.

   b. Il s'agit de déterminer un couple de réels (α, β) tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. En termes de coordonnées, cela se traduit par le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 4 \\ 3\alpha - 4\beta = 5 \end{cases}$ d'inconnues α et β.

$$\begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 4 \\ 3\alpha - 4\beta = 9 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6\alpha + 18\beta = 12 \\ 6\alpha - 8\beta = 18 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6\alpha + 18\beta = 12 \\ 26\beta = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha + 18\beta = 12 \\ \beta = -\dfrac{3}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha + 18\times\left(-\dfrac{3}{13}\right) = 12 \\ \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{35}{13} \\ \beta = -\dfrac{3}{13} \end{cases}$$

2. Dire que $A\,(3,2)$ signifie que $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Les coordonnées de A dans $\mathcal{R}'$ sont un couple de réels (x,y) tels que $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, c'est à dire que x et y sont solutions du système $\mathcal{S}'$: $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$, que l'on résout pour obtenir $= \dfrac{12}{13}$ et $y = \dfrac{5}{26}$. Ainsi $A\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{26}\right)_{\mathcal{R}'}$.

EX. 2 | Réf. 1971

Soient $A\,(2,4)$, $B\,(8,1)$ et $C\,(5,6)$.

1. Calculer $\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$. Comment interprète-t-on géométriquement ce résultat ?
2. On note H le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC.

   a. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de CH et AB.

   b. Justifier alors que la distance de C à (AB) vaut $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

   c. La calculer avec cette formule.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1971

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}6&3\\-3&2\end{vmatrix}=6\times 2-(-3)\times 3=12+9=21$. Par suite $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{21}{2}$.
   Géométriquement on vient de calculer l'aire du triangle ABC.
2. **a.** Le segment $[AH]$ est donc une hauteur du triangle ABC, et son aire vaut donc $\frac{AB\times AH}{2}$.
   b. La distance de C à (AB) est égal à AH. Donc les deux relations $\mathbb{A}_{ABC}=\frac{AB\times AH}{2}$ et $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ permettent d'en déduire que $AB\times AH=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$, et comme $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, on en déduit que la distance de C à (AB) vaut $\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.
   c. Puisque $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=6^2+(-3)^2=36+9=45$, on en déduit que $AH=\frac{21}{\sqrt{45}}=\frac{21\sqrt{45}}{45}=\frac{7\sqrt{45}}{15}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2275

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}=\left(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, et les coordonnées des points et vecteurs seront données dans ce dernier.
On considère les points $A(1,1)$, $B(3,4)$ et $C(3-k,-1)$ où k est un nombre réel.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
3. Démontrer que pour la valeur de k trouvée à la question précédente, le triangle ABC est alors aussi isocèle en A.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2275

1. On a directement que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-k\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-k\\-5\end{pmatrix}$.
2. Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, c'est à dire si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$. Ici, on a : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=2(2-k)+3\times(-2)=-2k-2$ et $-2k-2=0 \Leftrightarrow k=-1$. Par conséquent, le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $k=-1$.
3. On se place donc dans le cas où $k=-1$. Pour montrer que le triangle ABC est alors isocèle en A, il suffit de montrer que $AB=AC$, c'est à dire que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$. On a clairement que : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ et puisque $k=1$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$, ce qui conduit bien à $AC=AB$.