Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3740

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont on note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $2XP - \left(X^2 - 1\right) P' \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2XP - \left(X^2-1\right)P' \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $P = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter $f(P)$ en fonction de a, b et c.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3740

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. En notant a_2 le coefficient de degré 2 de P, par opération sur les degrés on a : $\underbrace{\underbrace{2XP}_{\in\mathbb{R}_3[X] \text{ avec pour coef. dominant } 2a_2} \underbrace{- \underbrace{\left(X^2-1\right)}_{\in\mathbb{R}_2[X]} \times \underbrace{P'}_{\in\mathbb{R}_1[X] \text{ avec pour coef. dominant } 2a_2}}_{\in\mathbb{R}_3[X] \text{ avec pour coef. dominant } 2a_2}}_{\in\mathbb{R}_2[X] \text{ car les termes de degré 3 s'annulent}}$
2. On a déjà $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$. Il reste à vérifier son caractère linéaire.
Soit alors $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$. Alors :
$$\begin{array}{rcl} f\left(P_3\right) & = & 2XP_3 - \left(X^2-1\right)P_3' \\ & = & 2X\left(\lambda P_1 + P_2\right) - \left(X^2-1\right)\left(\lambda P_1 + P_2\right)' \\ & = & \lambda 2XP_1 + 2XP_2 - \left(X^2-1\right)\left(\lambda P_1' + P_2'\right) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ & = & \lambda 2XP_1 + 2XP_2 - \lambda\left(X^2-1\right)P_1' - \left(X^2-1\right)P_2' \\ & = & \lambda f\left(P_1\right) + f\left(P_2\right) \end{array}$$
ce qui assure le caractère linéaire de f.
Par conséquent, f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En posant $P = aX^2+bX+c$, il vient directement que : $\begin{array}{rcl} f(P) & = & 2X\left(aX^2+bX+c\right) - \left(X^2-1\right)(2aX+b) \\ & = & 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - 2aX^3 - bX^2 + 2aX + b \\ & = & bX^2 + (2c+2a)X + b \end{array}$
4. En notant $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la basse canonique et en utilisant la question précédente, on trouve que $f(1) = 2X$, $f(X) = X^2 + 1$ et $f\left(X^2\right) = 2X$. Par suite, on en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Il est immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de rang 2, par suite $\mathrm{rg}\,(f) = 2$ et d'après le théorème du rang, puisque $\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) = 3$, il vient que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$. Or on remarque toujours à l'aide de la matrice de f que $f\left(1 - X^2\right) = \tilde{0}$ et donc que $1 - X^2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ ce qui en fait une base puisque $1 - 2X$ est non nul et que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est une droite vectorielle.
On en déduit donc que $\mathrm{Im}\,(f) = \underbrace{\mathrm{Vect}\,\left(2X, X^2+1\right)}_{\text{famille de 2 vecteurs non colinéaires donc libre}}$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left(1 - X^2\right)$.
6. Puisque $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) \neq 0$, f n'est pas injectif, et par suite n'est pas bijectif et par conséquent, f n'est pas un automorphisme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3741

On note $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On note alors $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
5. Soit alors $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & A \times M \end{array} \right.$.
   - **a.** Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
   - **b.** Déterminer la matrice de f dans la base $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$.
   - **c.** En déduire que $f \circ f \circ f = 2f$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 3741

1. On obtient directement que $1A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Supposons que l'on ait : $(\star) : \alpha\mathrm{I}_3 + \beta A + \gamma A^2 = (0)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
   On a clairement que $(\star) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta & \gamma \\ \beta & 2\gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ainsi par identification des coefficients des matrices, il vient que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.
   Par conséquent, la famille $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On remarque que :
   $$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{E} & \Leftrightarrow & \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c+b & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2 \\ & \Leftrightarrow & M \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right) \end{array}$$
   Par conséquent, $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ et donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. $\left(\mathrm{I}_3, A, A^2\right)$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$. Elle en est donc une base. Comme elle est formée de 3 vecteurs, on en déduit que $\dim(\mathcal{E}) = 3$.
5. **a.** Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $P = \lambda M + N$.
   Il vient alors : $$\begin{array}{rcl} f(P) & = & f(\lambda M + N) \\ & = & A(\lambda M + N) \\ & = & \lambda AM + AN \\ & = & \lambda f(M) + f(N) \end{array}$$ et par conséquent f est linéaire.
   De plus si $M \in \mathcal{E}$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \alpha\mathrm{I}_3 + \beta A + \gamma A^2$. D'où par linéarité de f, on a $f(M) = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3$. Or $A^3 = 2A$, donc on a bien $f(M) \in \mathcal{E}$ et par suite $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

   b. On obtient directement que $f(\mathrm{I}_3) = A$, puis $f(A) = A^2$ et $f\left(A^2\right) = A^3$. Or $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A^2 = 2A$.

   Ainsi, on a : $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I}_3, A, A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. On sait que : $(f \circ f \circ f = 2f) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I}_3,A,A^2)}(f)\right)^3 = 2\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I}_3,A,A^2)}(f)\right)$.

Or on a $\left(\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I}_3,A,A^2)}(f)\right)^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&4\\0&2&0\end{pmatrix}$ ce qui est bien $2\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I}_3,A,A^2)}(f)$. D'où le résultat.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 3742

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $A = \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\m&1&-1&0\\1&-1&m&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'injectivité de f suivant m.
2. Dans tous les cas, donner le rang de f, une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 3742

1. On sait que f est injective si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul. Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, c'est donc équivalent à dire que f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}\,(f) = 4$.

   Or on a : $A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1+m&-1-m&0\\0&0&m-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et ainsi on a : $(\mathrm{rg}\,(f) = 4) \quad \Leftrightarrow \quad (m \neq 1$ et $m \neq -1)$.

   On en conclut que : $\quad (f est$injective$) \quad \Leftrightarrow \quad (m \in \{-1, 1\})$.

2. On notera $\mathcal{B}_4 = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On procède à un échelonnement en colonnes de la matrice A pour obtenir une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ dans chacun des cas :

   Si $m = 1$ **:** alors $\quad A \quad = \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&1&-1&0\\1&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&-2&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\sim_C}$
   $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{C_4 \leftrightarrow C_3}{\sim_C} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

   On en déduit donc que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,0), (0,2,0,0), (0,0,0,1))$ qui est une famille de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est échelonnée, donc est libre, ce qui donne une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   Ainsi, on a $\mathrm{rg}\,(f) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.

   On remarque par ailleurs en suivant les opérations sur les colonnes que : $\quad f\left(\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$.

   On en déduit donc que $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et puisque $\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \neq \overrightarrow{0}$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$, il vient $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((0,1,1,0))$.

   Si $m = -1$ **:** alors $\quad A \quad = \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-1&1&-1&0\\1&-1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_2\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&0&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_2\\ \text{puis} C_3 \leftarrow C_4}}{\sim_C}$
   $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ On en déduit donc que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1,0), (0,0,-2,0), (0,0,0,1))$ qui est une famille de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est échelonnée, donc est libre, ce qui donne une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   Ainsi, on a $\mathrm{rg}\,(f) = 3$ et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$.

On remarque par ailleurs en suivant les opérations sur les colonnes que : $f\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)=\overrightarrow{0}$.

On en déduit donc que $\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Ker}(f)$ et puisque $\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2} \neq \overrightarrow{0}$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$, il vient $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((1,1,0,0))$.

Si $m \notin \{-1,1\}$ **:** on sait que dans ce cas $\mathrm{rg}(f)=4$, donc d'après la caractérisation des endomorphismes bijectifs, on en déduit que f est un automorphisme et dans ce que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^4$ et $\mathrm{Ker}(f)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

EX. 4 | Réf. 3744

On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit les deux fonctions ch et sh appelées respectives cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch}:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{array}\right.$$

On note alors $H=\mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ et $F=\{f\in H,\ f(\ln(2))=0\}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ f & \longmapsto & (f(-\ln(2)),f(\ln(2)))\end{array}\right.$. Montrer que φ est un isomorphisme.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 3744

1. H est un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par construction et même que H est de dimension finie inférieure ou égale à 2 car engendré par deux vecteurs.
   Montrons que la famille $(x\longmapsto \mathrm{ch}(x), x\longmapsto \mathrm{sh}(x))$ est une famille libre.
   Supposons donc que $\alpha\mathrm{ch}+\beta\mathrm{sh}=\tilde{0}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, c'est à dire que l'on a : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha\mathrm{ch}(x)+\beta\mathrm{sh}(x)=0$.
   En particulier, il vient que $\alpha\mathrm{ch}(0)+\beta\mathrm{sh}(0)=0$ c'est à dire $\alpha=0$.
   Par suite : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \beta\mathrm{sh}(x)=0$.
   Or puisque $\mathrm{sh}(1)=\dfrac{\mathrm{e}^{1}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\neq 0$, il vient que $\beta=0$.
   Par conséquent, $\alpha=0$ et $\beta=0$. Donc la famille $(\cos,\mathrm{sh})$ est une famille libre.
   Finalement, H est engendré par deux vecteurs qui forment une famille libre. Cette famille est donc une base de H et puisqu'elle est formée de deux vecteurs, on obtient que $\dim(H)=2$.
2. $F\subset H$ **:** par construction ;
   $\tilde{0}\in F$ **:** en effet, $\tilde{0}(\ln(2))=0$ donc $\tilde{0}\in F$
   Stabilité par combinaison linéaire : Soient $(f_1,f_2)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On pose $f_3=\lambda f_1+f_2$.
   Alors : $$\begin{aligned} f_3(\ln(2)) &= (\lambda f_1+f_2)(\ln(2))\\ &= (\lambda f_1)(\ln(2))+f_2(\ln(2))\\ &= \lambda\underbrace{f_1(\ln(2))}_{=0\text{car } f_1\in F}+\underbrace{f_2(\ln(2))}_{=0 \text{ car } f_2\in F}\\ &= 0\end{aligned}$$ et donc $f_3\in F$ ce qui assure la statbilité de F par combinaison linéaire.
   On en déduit donc que F est bien un sous-espace vectoriel de H.
3. Puisque F est un sous-espace vectoriel de H, il est de dimension au plus 2.

$$\begin{aligned}
(f \in F) \quad & \Leftrightarrow \left(\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f = \alpha\mathrm{ch} + \beta\mathrm{sh} \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha\mathrm{ch}(x) + \beta\mathrm{sh}(x) \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha\mathrm{ch}(x) + \beta\mathrm{sh}(x) \\ \frac{5}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0 \end{cases}\right) \\
& \Leftrightarrow \left(\exists \beta \in \mathbb{R}, f = \beta\left(-\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)\right) \\
& \Leftrightarrow \left(f \in \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto -\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dim(F) = 1$ et que $F = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto -\frac{3}{5}\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\right)$.

4. **Caractère linéaire de Φ :** soient $(f_1, f_2) \in H \times H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f_3 = \lambda f_1 + f_2$.

On a alors :
$$\begin{aligned}
\varphi(f_3) &= (f_3(-\ln(2)), f_3(\ln(2))) \\
&= ((\lambda f_1 + f_2)(-\ln(2)), (\lambda f_1 + f_2)(\ln(2))) \\
&= ((\lambda f_1)(-\ln(2)) + f_2(-\ln(2)), (\lambda f_1)(\ln(2)) + f_2(\ln(2))) \\
&= (\lambda f_1(-\ln(2)) + f_2(-\ln(2)), \lambda f_1(\ln(2)) + f_2(\ln(2))) \\
&= (\lambda f_1(-\ln(2)), \lambda f_1(\ln(2))) + (f_2(-\ln(2)), f_2(\ln(2))) \\
&= \lambda (f_1(-\ln(2)), f_1(\ln(2))) + (f_2, (-\ln(2)))\, f_2(\ln(2)), \\
&= \lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2)
\end{aligned}$$
et par suite φ est bien linéaire.

On obtient donc : $\varphi(\mathrm{ch}) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ et $\varphi(\mathrm{sh}) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

En notant $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{ch},\mathrm{sh}),\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 2 puisque ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

Par suite, φ est une application linéaire de rang 2 entre deux espaces de dimension 2. D'après le théorème de caractérisation des isomorphismes, φ est un isomorphisme.

EX. 5 | Réf. 3743

Dans tout cet exercice, m désigne un réel et on note $A(m)$ la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

On désignera par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A(m)$.

On note par ailleurs $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que $m = 1$.
   - **a.** Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
   - **b.** Calculer, pour tout n entier naturel non nul $(A(1))^n$.
2. Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m \neq 1$.
   - **a.** Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.
   - **b.** Déterminer deux réels a et b dépendants de m tels que l'on ait $(A(m))^2 = aA(m) + b\mathrm{I}_3$.
   - **c.** En déduire une expression de $(A(m))^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de I_3, puis expliciter les coefficients de $(A(m))^{-1}$ en fonction de m.
3. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer J^2.
   - **b.** En déduire J^k en fonction de J et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   - **c.** Exprimer $A(m)$ en fonction de I_3, J et m.
   - **d.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (A(m))^n = \mathrm{I}_3 + (1-(1-m)^n)\, J$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 3743

Dans toute la suite, on note $\mathcal{B}_3 = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. a. Puisqu $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, $\operatorname{rg}(A(1)) = 1$, donc $rg(f) = 1$ et ainsi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}\right)$.

Ainsi, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$.

De plus, on remarque que $f\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{0}$ et $f\left(\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{1} \in \operatorname{Ker}(f)$ et $\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f)$. Ces deux vecteurs sont non nuls non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$ qui est lui-même de dimension 2, et par conséquent forment une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}\right)$.

b. On remarque que $A(1)^2 = A(1)$. Un raisonnement par récurrence sur n permettrait alors de montrer que $(A(1))^n = A(1)$.

2. a. La matrice $A(m)$ étant triangulaire supérieure, elle est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls. Or puisque $m \neq 1$ c'est le cas. Donc $A(m)$ est inversible.

b. Un calcul direct donne que $(A(m))^2 = \begin{pmatrix} m^2 & m & m \\ 0 & (1-m)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)^2 \end{pmatrix}$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $aA(m) + b\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} a+b & am & am \\ 0 & a(1-m)+b & 0 \\ 0 & 0 & a(1-m)+b \end{pmatrix}$.

Donc par identification des coefficients pour obtenir la décomposition voulue, il est nécessaire que (a, b) soit tel que $\begin{cases} a + b = m^2 \\ a(1-m) + b = (1-m)^2 \end{cases}$ ce qui donne $a = 2 - m$ et $b = m - 1$.

Réciproquement, on vérifie directement que $(2-m)A(m) + (m-1)\,\mathrm{I}_3 = (A(m))^2$.

c. On en déduit donc que : $A(m)\,(A(m) - (m-2)\mathrm{I}_3) = (m-1)\,\mathrm{I}_3$.

Si $m = 1$ **:** on sait déjà que $A(1)$ n'est pas inversible puisque ses trois colonnes sont liées.

Si $m \neq 1$ **:** alors $A(m)\left(\dfrac{1}{m-1}A(m) - \dfrac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$

Ainsi $A(m)$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{m-1}A(m) - \dfrac{m-2}{m-1}\mathrm{I}_3$.

3. a. On trouve directement que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $J^2 = -J$.

b. De même, on obtient directement que $J^3 = J$ Par suite, on a clairement que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad J^{2p} = -J \quad$ et $\quad J^{2p+1} = J$.

c. On a directement que $A(m) = \mathrm{I}_3 + mJ$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\mathrm{I}_3.(mJ) = (mJ).\mathrm{I}_3$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir que :

$$
\begin{aligned}
(A(m))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} (mJ)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k J^k \\
&= \mathrm{I}_3 + \left(\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} J^{2p} \right) + \left(\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} J^{2p+1} \right) \\
&= \mathrm{I}_3 + \left(\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} (-J) \right) + \left(\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} J \right) \\
&= \mathrm{I}_3 + \left(- \sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} \right) + \left(\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 - \left(\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} m^{2p} \right) - \left(\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} m^{2p+1} \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 - \left(\sum_{1 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^{2p} m^{2p} \right) + \left(\sum_{1 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} (-1)^{2p+1} m^{2p+1} \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^k \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 - \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k \right) - 1 \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 - \left((1-m)^n - 1 \right) J \\
&= \mathrm{I}_3 + \left(1 - (1-m)^n \right) J
\end{aligned}
$$