À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4093] | 1| Étude d'un endomorphisme

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. f est-il un automorphisme ?

Éléments de correction

Caractère linéaire de f : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel.

Soient alors $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ où l'on suppose que $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $N = (n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$.

On pose alors $R = \lambda M + N$ où $N = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et montrons que $f(R) = \lambda f(M) + f(N)$.

Par définition, $R = (\lambda m_{ij} + n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$. Par suite, il vient :

$$\begin{aligned}
f(R) &= \begin{pmatrix} r_{11} - r_{12} & r_{11} - r_{21} \\ r_{22} & r_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} + n_{11} - (\lambda m_{12} + n_{12}) & \lambda m_{11} + n_{11} - (\lambda m_{21} + n_{21}) \\ \lambda m_{22} + n_{22} & \lambda m_{12} + n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} - \lambda m_{12} + n_{11} - n_{12} & \lambda m_{11} - \lambda m_{21} + n_{11} - n_{21} \\ \lambda m_{22} + n_{22} & \lambda m_{12} + n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda m_{11} - \lambda m_{12} & \lambda m_{11} - \lambda m_{21} \\ \lambda m_{22} & \lambda m_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} - n_{12} & n_{11} - n_{21} \\ n_{22} & n_{12} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda m_{12} & m_{11} - m_{21} \\ m_{22} & m_{12} \end{pmatrix} + f(N) \\
&= \lambda f(M) + f(N)
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire et c'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Caractère bijectif de f : puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à 4, d'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie, f est bijectif si, et seulement si, le rang de f est égal à 4.

Or le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles donnée dans une base quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si l'on note $\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1-0 & 1-0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{12} \\
f(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0-1 & 0-0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0-0 & 0-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{12} \\
f(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}
\end{aligned}$$

Il vient alors que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en ligne donne :

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$
$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \underset{L_4 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, ainsi son rang est égal à 4, et par suite $\mathrm{rg}(f) = 4$.
f étant un endomorphisme de rang 4 d'un espace de dimension 4, d'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en dimension finie, f est bijectif, donc c'est un automorphisme.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4289] | 2| Suite linéaire et représentation matricielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

Pour la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$.

(1). Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
En déduire l'expression de U_n en fonction de A et U_0.

(2). On pose $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&9&4\end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel $\begin{pmatrix}6&-5&1\\2&-3&1\\-6&8&-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&9&4\end{pmatrix}$.
Qu'en déduire pour P ?

(3). Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.

(4). Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

(5). Donner alors en fonction de n l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

(1). Puisque $U_n = \begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$ il vient que $U_{n+1} = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix}$. Par suite en posant $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}$: il vient :

$$\begin{aligned} AU_n &= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}\end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
On pourrait alors montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A^nU_0$.

(2). Un calcul direct donne : $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathrm{I}_3$

On en déduit donc que la matrice P est inversible, et d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

(3). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \\ 1 & 27 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $P^{-1}AP = D$ où $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$.

(4). Puisque $P^{-1}AP = D$, en multipliant à gauche par P, il vient $AP = PD$ puis en multiplicant par P^{-1} à droite, il vient $A = PDP^{-1}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: ´ $A^n PD^n P^{-1}$ ˇ

Montrons par récurrence sur l'entier n que la propositon $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Initisalition : au rang 0, par convention $A^0 = \mathrm{I}_3$. De même $D^0 = \mathrm{I}_3$ et ainsi : $\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$

et ainsi la propostion $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition, $A^{n+1} = A^n \times A$. Or par hypothèse de récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$ et on sait que $A = PDP^{-1}$.

Par suite, il vient : $\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_3DP{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

(5). De ce qui précède, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = PD^nP^{-1}U_0$.

Cette relation s'écrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Seul le coefficient de la première ligne du résultat terminal nous intéresse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 3^n & 2^n \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3^n & 2^n \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + 3^n - 2^{n+1} \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{1}{2}\left(3 - 2^{n+1} + 3^n\right)$.