Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2407

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = (X-1)^2$ et $P_3 = (X+1)^2$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées de $Q = 12$ et $R = 3X^2 - 10X + 1$.

EX. 2 | Réf. 2408

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f\left(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\left(A^2\right)$ et $\operatorname{Im}\left(A^2\right)$.
5. Calculer $(\mathrm{Id}_3 - A)\left(\mathrm{Id}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire que $\mathrm{Id}_3 - A$ est inversible, puis expliciter $(\mathrm{Id}_3 - A)^{-1}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2409

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P = a + bX + cX^2 & \longmapsto & 3a + b - c + (2a + 2b - c)X + (4a + 2b - c)X^2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. f est-elle bijective ?
3. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera une base.
4. Soit $G = \operatorname{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.