## Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

---

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

**Ce travail est à rèaliser en auto-correction.**
**Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.**

## Un peu de technique

### EX. 1 | Réf. 1680

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

**a.** Établir que pour tout entier naturel $n$ :

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \text{ et } J_{n+1} = -(n+1)I_n$$

**b.** Calculer $I_n$ et $J_n$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

**2.** On considère la fonction réelle $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}\,(1-\cos(x)) & \text{si} \quad x \in [0; 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**a.** Montrer que $f$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$.

**b.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**c.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### EX. 2 | Réf. 1566

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
Dans tout l'exercice, on identifiera les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, si chaque coefficient de $U_n$ converge, quand $n$ tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de $U$.

**1. a.** Montrer que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique réelle te que ses valeurs propres sont positives.
On note alors $c$ sa plus grande valeur propre.

**b.** On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique et on note encore $A$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
Montrer que : $\quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \left\| A\overrightarrow{x} \right\|^2 \leq c \left\| \overrightarrow{x} \right\|^2$.

**c.** En déduire que : $\quad \forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \left\langle A^k \overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y} \right\rangle \right| \leq c^{\frac{k}{2}} \left\| \overrightarrow{x} \right\| \left\| \overrightarrow{y} \right\|$.

**2. a.** Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour $(i, j) \in [\![1; p]\!]^2$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\left\langle A^k \overrightarrow{e_i} \,\middle|\, \overrightarrow{e_j} \right\rangle}{k!}$ converge.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

**c.** Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $A$, alors $\mathrm{e}^{\lambda}$ est une valeur propre de $\exp(A)$.