Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2401

Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Calculer LC et $A = CL$.
2. Quel est le rang de A ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $A^2 = A$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2401

1. RAS
2. Procéder à un échelonnement de la matrice A obtenue.
3. On peut au moins essayer d'expliciter A^2 et d'identifier avec A pour établir une ou des conditions sur a, b et c pour avoir $A^2 = A$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2394

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant les relations :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ c_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n et c_n uniquement en fonction de n. Dans tout ce qui suit, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$..

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.
5. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2394

1. Observer le lien entre X_{n+1} et X_n pour déterminer la matrice A. Penser à ce que l'on a fait lorsque l'on écrit l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
2. Une petite récurrence s'impose...
3. Effectuer les calculs demandés et remarquer qu'il se passe quelque chose pour les puissances de N à partir d'un moment.

4. Décomposer la matrice A à l'aide de l'identité et de la matrice N, puis utiliser le binôme de Newton.

5. Utiliser la relation $X_n = A^n X_0$ pour obtenir les expressions des suites.