Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2407

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = (X-1)^2$ et $P_3 = (X+1)^2$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées de $Q = 12$ et $R = 3X^2 - 10X + 1$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2407

1. On peut utiliser la matrice de la famille de vecteurs puis utiliser ensuite les résultats connus en dimension finie.
2. Les formules de changement de base...

EX. 2 | Réf. 2408

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f\left(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\left(A^2\right)$ et $\mathrm{Im}\,\left(A^2\right)$.
5. Calculer $(\mathrm{Id}_3 - A)\left(\mathrm{Id}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire que $\mathrm{Id}_3 - A$ est inversible, puis expliciter $(\mathrm{Id}_3 - A)^{-1}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2408

1. Utiliser la linéarité de f.
2. Traduire la recherche du noyau à l'aide d'un système linéaire, et utiliser le théorème du rang pour déterminer une base de l'image.
3. RAS
4. Revenir à la définition du noyau d'une matrice et de son image.
5. Revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2409

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P = a + bX + cX^2 & \longmapsto & 3a + b - c + (2a + 2b - c)X + (4a + 2b - c)X^2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$.
2. f est-elle bijective ?
3. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera une base.

4. Soit $G = \mathrm{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2409

1. Revenir à la caractérisation des applications linéaires et se souvenir de ce que veut dire « endo »
2. Utiliser les arguments concernant la bijectivité en dimension finie.
3. Revenir à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
4. Se souvenir de ce qu'est une somme directe, des sous-espaces supplémentaires et que l'on est en dimension finie.