Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2352

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est une famille libre de vecteurs de E.

On définit les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par $\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{cases}$.

Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est libre.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2352

- Revenir à la définition d'uen famille libre pour $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.
- En remplaçant $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par leurs expressions, apparaîtra une combinaison linéaire $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ qu'il faudra utiliser.
- Ne pas oublier que $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est une famille libre par hypothèse !

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2350

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et on considère $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ dont la matrice A dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$ où l'on note $u^2 = u \circ u$.

1. Expliciter les vecteurs a, b, c et d.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.
4. Calculer les images par u des vecteurs a, b, c et d dans la base $\mathcal{B}'$.
5. En déduire la matrice N de u dans $\mathcal{B}'$.
6. Calculer N^4 et en déduire A^4.
7. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$, puis une base de $\mathrm{Im}(u)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2350

- Effectuer ces sommes vectorielles pour déterminer les coordonnées des quatre vecteurs demandés.
- Utiliser la représentation matricielle d'une famille pour montrer que c'est une base.
- Utiliser A pour calculer les images sans oublier de les exprimer dans $\mathcal{B}'$ au final.
- Utiliser la question précédente. . .

- Calculer la puissance de N demandée, puis écrire le lien entre A et N pour obtenir A^4.
- Utiliser A pour déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$.